第六章　导数及其应用

6.1　导数

6.1.1　函数的平均变化率+6.1.2　导数及其几何意义

易错记

1-1. C　【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导,所以由导数的定义可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\right)\right]=$$

$-\frac{1}{3}f'(x_0)$(提示:注意分子分母中对应符号).

2-1. $2x-y-2=0$ 或 $2x-y+2=0$　【解析】曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点坐标为 $(1,0)$, $(-1,0)$, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-\frac{1}{x+\Delta x}-\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\Delta x}=1+\frac{1}{x^2},$$

$\therefore f'(1)=2, f'(-1)=2$,

$\therefore$ 所求切线方程为 $y=2(x-1)$ 或 $y=2(x+1)$,即 $2x-y-2=0$ 或 $2x-y+2=0$.

3-1. $y=0$ 或 $3x-y-2=0$　【解析】设切点为 $Q(x_0,x_0^3)$,得切线的斜率 $k=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=3x_0^2$,切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$,即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$. 因为切线过点 $P\left(\frac{2}{3},0\right)$,所以 $2x_0^2-2x_0^3=0$,解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$,则 $f'(0)=0$, $f'(1)=3$,从而切线有两条,切线方程分别为 $y=0$ 或 $3x-y-2=0$.

题型诀

1-1. B　【解析】因为 $f(x)=x^3-\ln x$,所以 $f(e)=e^3-\ln e=e^3-1$, $f(1)=1^3-$

$\ln 1=1$,

所以 $f(x)=x^3-\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}=\dfrac{e^3-1-1}{e-1}=\dfrac{e^3-2}{e-1}$.

故选 B.

1-2. A 【解析】由区间的性质可知 $2a>a$，可得 $a>0$，

又由 $\dfrac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=\dfrac{16a^4-a^4}{a}=15a^3=15$，

得 $a=1$. 故选 A.

1-3. A 【解析】由容器的形状可知，在相同的变化时间内，高度的增加量越来越小，所以 $f(t)$ 在区间 $[t_0-\Delta t,t_0]$，$[t_0,t_0+\Delta t]$ $(\Delta t>0)$ 上的平均变化率由大变小，即 $k_2>k_1$. 故选 A.

2-1. A 【解析】由 $s(1+\Delta t)-s(1)$ 表示从 1 s 到 $(1+\Delta t)$ s 这段时间内物体的位移，Δt 为从 1 s 到 $(1+\Delta t)$ s 这段时间的改变量，所以 $\dfrac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$ 表示从 1 s 到 $(1+\Delta t)$ s 这段时间的平均速度，故选 A.

2-2. C 【解析】由题得 $v_1=\dfrac{s(2)-s(1)}{2-1}=\dfrac{2^3+2^2+1-1^3-1^2-1}{1}=10$，

$v_2=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(2+\Delta t)^3+(2+\Delta t)^2+1-2^3-2^2-1}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}[16+7\Delta t+(\Delta t)^2]=16$.

则 $v_1+v_2=26$.

2-3. 【解】(1) $h(0)$ 表示飞机起飞前的高度；

$h(1)$ 表示飞机起飞后第 1 s 时的高度；

$h(2)$ 表示飞机起飞后第 2 s 时的高度.

(2) 飞机起飞后第 2 s 内的平均速度

$\bar{v}=\dfrac{h(2)-h(1)}{2-1}=$

$\dfrac{5\times2^3+30\times2^2+45\times2+4-(5\times1^3+30\times1^2+45\times1+4)}{1}$

$=170(\text{m/s})$.

(3) 第 2 s 末的瞬时速度为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta h}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(2+\Delta t)-h(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(2+\Delta t)^3+30(2+\Delta t)^2+45(2+\Delta t)+4-5\times 2^3+30\times 2^2+45\times 2+4}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{5(\Delta t)^3+60(\Delta t)^2+225\Delta t}{\Delta t}=225(\text{m/s})$.

∴ 第 2 s 末的瞬时速度为 225 m/s.

3-1. A 【解析】∵ $\Delta y=(2+\Delta x)^3-3(2+\Delta x)-2^3+6=9\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$,

∴ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=9+6\Delta x+(\Delta x)^2$,

∴ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[9+6\Delta x+(\Delta x)^2]=9$,

故选 A.

3-2. 【解】当 $x=1$ 时, $f(x)=3x^2+2$,

所以 $\Delta f=3(1+\Delta x)^2+2-(3\times 1^2+2)=6\Delta x+3(\Delta x)^2$.

所以 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=6+3\Delta x$.

所以 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)=6$.

当 $x=4$ 时, $f(x)=29+3(x-3)^2$,

所以 $\Delta f=29+3(4+\Delta x-3)^2-[29+3(4-3)^2]=6\Delta x+3(\Delta x)^2$.

所以 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{6\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=6+3\Delta x$.

所以 $f'(4)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6+3\Delta x)=6$.

4-1. B 【解析】由题图可知, 函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的增长速度越来越快, 故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上图象的切线的斜率越来越大. 又 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=a$, 所以 $f'(1)<a<f'(2)$. 故选 B.

4-2. D 【解析】对于 A, 设 $\tan\alpha=\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}$, $\tan\theta=\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$ (提示: 斜率和倾斜角的关系),

由题图得 $\alpha>\theta$, 所以 $\tan\alpha>\tan\theta$,

所以$\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}>\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$，故 A 错误；

对于 B，

由题图上点的切线的斜率越来越小，根据导数的几何意义得 $r'(1)>r'(2)$（提示：根据斜率比较导数大小），故 B 错误；

对于 C，设 $V_1=0,V_2=3$，所以 $r\left(\dfrac{V_1+V_2}{2}\right)=r\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$\dfrac{r(V_1)+r(V_2)}{2}=\dfrac{r(3)}{2}$（提示：取特值理解函数值的意义），因为 $r\left(\dfrac{3}{2}\right)-r(0)>r(3)-r\left(\dfrac{3}{2}\right)$，所以 $r\left(\dfrac{3}{2}\right)>\dfrac{r(3)}{2}$，故 C 错误；

对于 D，$\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$ 表示 $A(V_1,r(V_1))$，$B(V_2,r(V_2))$ 两点连线的斜率，$r'(V_0)$ 表示 $C(V_0,r(V_0))$ 处切线的斜率（提示：通过斜率与导数的关系分析），由于 $V_0\in(V_1,V_2)$，所以可以平移直线 AB 使之和曲线相切，切点就是点 C，故 D 正确. 故选 D.

5-1. $(1,2)$　【解析】$\because f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^3+a(1+\Delta x)-1^3-a}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[3+a+3\Delta x+(\Delta x)^2]$

$=3+a$.

又曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+4y=0$ 垂直，

$\therefore f'(1)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=(3+a)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-1$，解得 $a=1$. $\therefore f(x)=x^3+x$，$\therefore f(1)=2$，即切点为$(1,2)$.

5-2.【解】曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线斜率 $k_1=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2x_0$.

曲线 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线斜率 $k_2=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1-(x_0+\Delta x)^3-(1-x_0^3)}{\Delta x}=-3x_0^2$.

由题意得 $2x_0=-3x_0^2$,

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-\dfrac{2}{3}$.

经检验,所求的两个解均符合题意.

当 $x_0=0$ 时,$y=f(x)$ 的切点为 $(0,-1)$,$y=g(x)$ 的切点为 $(0,1)$;

当 $x_0=-\dfrac{2}{3}$ 时,$y=f(x)$ 的切点为 $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{9}\right)$,$y=g(x)$ 的切点为 $\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{35}{27}\right)$.

6-1. C 【解析】$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{-2}{1+\Delta x}+2}{\Delta x}=\dfrac{2}{1+\Delta x}$,所以 $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2}{1+\Delta x}=2$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线方程为 $y+2=2(x-1)$,即 $y=2x-4$. 故选 C.

6-2. D 【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以 $a-1=0$(提示:奇函数偶次项系数为零),解得 $a=1$.

所以 $f(x)=x^3+x$,

则 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[(0+\Delta x)^3+(0+\Delta x)]-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[(\Delta x)^2+1]=1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y-0=f'(0)(x-0)$,

化简可得 $y=x$,故选 D.

6-3. 【解】(1) $\because A(2,4)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上,由 $f(x)=x^2$ 得,$f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(2+\Delta x)^2-2^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-4=4(x-2)$,

即 $4x-y-4=0$.

(2) 设切点坐标为 (x_0,x_0^2).

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2x_0$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$.

$\because$ 点 $(3,5)$ 在切线上,

$\therefore 5-x_0^2=2x_0(3-x_0)$,

即 $x_0^2-6x_0+5=0$,

解得 $x_0=1$ 或 $x_0=5$,

$\therefore$ 过点 $B(3,5)$ 且与曲线相切的切线有两条,切点分别为 $(1,1)$,$(5,25)$,切线斜率分别为 $2,10$,

$\therefore$ 切线方程为 $2x-y-1=0$ 和 $10x-y-25=0$.

6-4.【解】(1) $f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2-(1^2+1-2)}{\Delta x}=3$,

所以直线 l_1 的方程为 $y=3(x-1)$,即 $y=3x-3$.

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $B(b,b^2+b-2)$ 处的切线为 l_2,

$f'(b)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(b+\Delta x)^2+(b+\Delta x)-2-(b^2+b-2)}{\Delta x}=2b+1$,

所以直线 l_2 的方程为 $y-(b^2+b-2)=(2b+1)(x-b)$,

即 $y=(2b+1)x-b^2-2$.

因为 $l_1\perp l_2$,所以 $3\times(2b+1)=-1$,

所以 $b=-\dfrac{2}{3}$,

所以直线 l_2 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{22}{9}$.

(2) 由 $\begin{cases}y=3x-3,\\ y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{22}{9},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{6},\\ y=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$

即 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $\left(\dfrac{1}{6},-\dfrac{5}{2}\right)$,

l_1,l_2 与 x 轴的交点坐标分别为 $(1,0)$,$\left(-\dfrac{22}{3},0\right)$,所以所求三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left|-\dfrac{5}{2}\right|\times\left(1+\dfrac{22}{3}\right)=\dfrac{125}{12}$.

巩固练

1. C 【解析】由题可得 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{[(1+\Delta x)^2+1]-2}{\Delta x}=2+\Delta x$. 故选 C.

2. D 【解析】由题知函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $[-1,2]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\dfrac{(-2^3+1)-[-(-1)^3+1]}{3}=-3.$

故选 D.

3. B 【解析】$f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2a^2+a\Delta x)=2a^2$，

所以 $2a^2=4$，解得 $a=\pm\sqrt{2}$.

又因为 $f(x)$ 的图象开口向下，

所以 $a<0$，

所以 $a=-\sqrt{2}$. 故选 B.

4. A 【解析】由 $s=3-2t+t^2$ 得 $s'=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{3-2(t+\Delta t)+(t+\Delta t)^2-(3-2t+t^2)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(-2+2t+\Delta t)=2t-2$，当 $t=3$ 时，$s'=2\times3-2=4$，

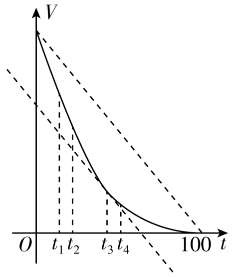
$\therefore$ 物体在 3 秒时的瞬时速度是 4 米/秒. 故选 A.

5. B 【解析】曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$ 在点 P 处的切线斜率为

$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(1+\Delta x)^2-2-\left(\frac{1}{2}\times1^2-2\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{2}\Delta x\right)=1$，

所以曲线在点 P 处的切线的倾斜角为 $45°$. 故选 B.

6. C 【解析】平均融化速度为 $\bar{v}=\dfrac{V(100)-V(0)}{100-0}$，反映的是 $V(t)$ 图象与坐标轴交点连线的斜率，观察可知 $t=t_3$ 处的瞬时速度（即切线的斜率）与平均速度一致，故选 C.



7. A 【解析】对于 A，平均变化率为

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2+1-2x_1-1}{x_2-x_1}=2,\ \text{A}$$

正确；

对于 B，平均变化率为$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=$

$\frac{2x_2^2+1-2x_1^2-1}{x_2-x_1}=2(x_2+x_1)$，不是定值，B

错误；

对于 C，平均变化率为$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=$

$\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_2+x_1$，不是定值，C 错误；

对于 D，平均变化率为$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=$

$\frac{2\sin x_2-2\sin x_1}{x_2-x_1}$，不是定值，D 错误. 故

选 A.

8. A 【解析】设切点为(x_0,y_0)，

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

由题意可知，切线斜率 $k=4$，即 $f'(x_0)=2x_0=4$，所以 $x_0=2$.

所以切点坐标为$(2,4)$，所以切线 l 的方程为 $y-4=4(x-2)$，即 $4x-y-4=0$.

故选 A.

9. D 【解析】$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$，

$\therefore f'(1)=-2$. 由导数的几何意义，知曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线斜率为-2.

10. A 【解析】因为$f(x)$是偶函数，所以

$f(-x)=(a-1)x^2+3bx+c-d-1=f(x)$，

所以 $b=0$.

由题意可得 $f(1)=a-1-3b+c-d-1=-(1+1)$，所以 $c-d=-a$，所以

$\frac{a-b}{c-d}=-1$.

11. 4 【解析】设抛物线在 P 点处的切线的斜率为 k，则

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-2+\Delta x)^2-(-2+\Delta x)+c-(6+c)}{\Delta x}=$$

-5，∴ 切线方程为 $y=-5x$.

∴ 点 P 的纵坐标为 $-5\times(-2)=10$.

将点 $P(-2,10)$ 代入 $y=x^2-x+c$，得 $c=4$.

12. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ 【解析】$y'=$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)+3-(x^2+2x+3)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2x+2)\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+2)=2x+2.$$

设点 P 横坐标为 x_0，则曲线 C 在点 P 处的切线斜率为 $2x_0+2$.

由已知得 $0\leqslant 2x_0+2\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant x_0\leqslant -\frac{1}{2}$.

13. $4a\pi$ 【解析】设温度变化量为 Δt，所以在 $t=0$ 时，铁球体积对温度的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\frac{4\pi}{3}(1+a\Delta t)^3-\frac{4\pi}{3}\times 1^3}{\Delta t}=$

$$\frac{4\pi}{3}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{3a\Delta t+3a^2(\Delta t)^2+a^3(\Delta t)^3}{\Delta t}=$$

$$\frac{4\pi}{3}\lim_{\Delta t\to 0}[3a+3a^2\Delta t+a^3(\Delta t)^2]=4a\pi.$$

14. BC 【解析】对于 A，在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲的增长量小于乙的增长量，所以甲的平均分出量小于乙的平均分出量，说法错误. 对于 B，在 $[t_2,t_3]$ 这段时间内，甲的增长量小于乙的增长量，所以乙的平均分出量大于甲的平均分出量，说法正确. 对于 C，在 t_2 时刻，乙的图象比甲的图象陡，瞬时增长率大，说法正确. 对于 D，甲的图象大致为一条直线，所以三个时间段的平均分出量相等，说法错误.

故选 BC.

6.1.3 基本初等函数的导数+
6.1.4 求导法则及其应用

易错记

1-1. A 【解析】因为 $f(x)=3\ln x+f'(1)x^2-5x$,所以 $f'(x)=\frac{3}{x}+2f'(1)x-5$,所以 $f'(1)=3+2f'(1)-5$,故 $f'(1)=2$.又 $f(1)=f'(1)-5$,所以 $f(1)=-3$,故选 A.

1-2. 1 【解析】因为 $f'(x)=2\cos 2x-f'(\pi)$,所以 $f'(\pi)=2\cos 2\pi-f'(\pi)$,解得 $f'(\pi)=1$.

题型诀

1-1. C 【解析】对于 A,$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,故 A 错误;

对于 B,$(e^x+1)'=e^x$,故 B 错误;

对于 C,$(\cos x)'=-\sin x$,故 C 正确;

对于 D,$(x\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$,故 D 错误.

故选 C.

1-2. C 【解析】对于 A 选项,$(3^x)'=3^x\ln 3$,故 A 选项错误;

对于 B 选项,$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$,故 B 选项错误;

对于 C 选项,$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$,故 C 选项正确;

对于 D 选项,$\left(x-\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$,故 D 选项错误. 故选 C.

1-3. C 【解析】因为 $f(x)=(x+2a)(x-a)^2=(x+2a)(x^2-2ax+a^2)=x^3-3a^2x+2a^3$,所以 $f'(x)=(x^3-3a^2x+2a^3)'=3(x^2-a^2)$. 故选 C.

1-4. ACD 【解析】对于 A,若 $y=2x^3+$

$3x^2-x+1$，则 $y'=6x^2+6x-1$，故 A 正确；

对于 B，若 $y=\cos\dfrac{\pi}{3}$，则 $y'=0$，故 B 错误；

对于 C，若 $y=\ln(2x+1)$，则 $y'=\dfrac{1}{2x+1}\cdot(2x+1)'=\dfrac{2}{2x+1}$，故 C 正确；

对于 D，若 $y=\dfrac{x}{e^x}$，则 $y'=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$，故 D 正确. 故选 ACD.

1-5. B 【解析】由题意杯子的底面面积 $S=16\pi$，则杯中溶液上升高度 $h=\dfrac{V(t)}{S}=\dfrac{\pi t^3+2\pi t^2}{16\pi}=\dfrac{1}{16}t^3+\dfrac{1}{8}t^2(t\geqslant 0)$，则 $h'=\dfrac{3}{16}t^2+\dfrac{1}{4}t$. 当 $t=4$ 时，$h=\dfrac{1}{16}\times 4^3+\dfrac{1}{8}\times 4^2=6<20$，此时 $h'=\dfrac{3}{16}\times 16+\dfrac{1}{4}\times 4=4$，即当 $t=4$ s 时杯中溶液上升高度的瞬时变化率为 4 cm/s.

1-6. 8 【解析】由 $s=t^2\cdot e^{t-2}$，得 $s'=2t\cdot e^{t-2}+t^2\cdot e^{t-2}$，

当 $t=2$ 时，$s'=2\times 2\times e^{2-2}+2^2\times e^{2-2}=8$，

所以质点在 $t=2$ 的瞬时速度是 8.

2-1. BD 【解析】直线 $y=x+b$ 的斜率为 1，根据导数的几何意义，判断选项中的导数值是否可以为 1.

A 选项中，令 $y'=-\dfrac{1}{x^2}+1=1$，方程无解，故 A 不正确；

B 选项中，令 $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=1$，解得 $x=1$，故 B 正确；

C 选项中，令 $y'=-3x^2+2x=1$，即 $3x^2-2x+1=0$，$\Delta<0$，方程无解，故 C 不正确；

D 选项中，令 $y'=e^x-1=1$，解得 $x=\ln 2$，故 D 正确.

故选 BD.

2-2. A 【解析】当 $x>0$ 时，$f(x)=$

$2x\ln x-x+1$，则 $f'(x)=2+2\ln x-1=2\ln x+1$，所以 $f(e)=2e-e+1=1+e$，$f'(e)=2\ln e+1=3$，

因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为 $y-(1+e)=3(x-e)$，

即 $3x-y-2e+1=0$. 故选 A.

2-3. AD 【解析】曲线 $C_1:y=x^2$，则 $y'=2x$，曲线 $C_2:y=x^3$，则 $y'=3x^2$，

设直线 l 与曲线 C_1 的切点坐标为 (a,a^2)，则切线方程为 $y=2ax-a^2$，

设直线 l 与曲线 C_2 的切点坐标为 (m,m^3)，则切线方程为 $y=3m^2x-2m^3$，

$\therefore 2a=3m^2$ 且 $a^2=2m^3$，$\therefore m=0$ 或 $m=\dfrac{8}{9}$，$\therefore$ 直线 l 的斜率为 0 或 $\dfrac{64}{27}$. 故选 AD.

2-4. AD 【解析】由题意 $f(x)$ 具有 T 性质，则存在 x_1,x_2，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.

对于选项 A，$f'(x)=-\sin x$，存在 $x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=-\dfrac{\pi}{2}$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$；

对于选项 B，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$x>0$，不存在 x_1，x_2，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$；

对于选项 C，$f'(x)=e^x>0$，不存在 x_1,x_2，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=-1$；

对于选项 D，$f'(x)=2x$，存在 $x_1=1$，$x_2=-\dfrac{1}{4}$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=4x_1x_2=-1$. 故选 AD.

3-1. C 【解析】$f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$，则 $f'(x)=a-\dfrac{b}{x^2}$，则在点 $(1,3)$ 处的切线的斜率 $k=f'(1)=a-\dfrac{b}{1^2}=a-b$，切线方程为 $y-3=(a-b)(x-1)$，即 $y=(a-b)x-a+b+3$.

函数 $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ 的图象在点 $(1,3)$ 处

的切线也是抛物线 $x^2=\frac{1}{3}y$ 的切线，联立 $\begin{cases}y=3x^2,\\y=(a-b)x-a+b+3,\end{cases}$ 可得 $3x^2-(a-b)x+a-b-3=0$，则 $\Delta=(a-b)^2-4\times3(a-b-3)=0$，

解得 $a-b=6$，故选 C.

3-2. $3x-y-9=0$ 【解析】设公共点为 (x_0,y_0).

由 $y=\ln(3x-8)\left(x>\frac{8}{3}\right)$ 得 $y'=\frac{3}{3x-8}$.

由 $y=x^2-3x$ 得 $y'=2x-3$，

所以 $\frac{3}{3x_0-8}=2x_0-3$，解得 $x_0=3$ 或 $x_0=\frac{7}{6}$（舍去），

所以 $y_0=0$，切线斜率为 $\frac{3}{9-8}=3$，

故所求切线的方程为 $y-0=3(x-3)$，

即 $3x-y-9=0$.

3-3. 【证明】设 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 $xy=a^2$ 上任一点，则 $y_0=\frac{a^2}{x_0}$.

$\because y'=\left(\frac{a^2}{x}\right)'=-\frac{a^2}{x^2}$，

当 $x=x_0$ 时，$y'=-\frac{a^2}{x_0^2}$，

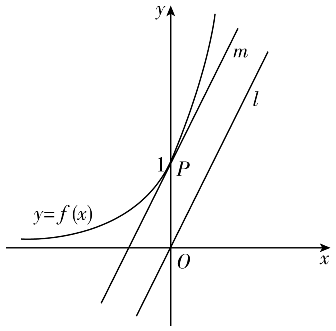
$\therefore$ 曲线在点 P 处的切线方程为 $y-y_0=-\frac{a^2}{x_0^2}\cdot(x-x_0)$.

令 $x=0$，得 $y=\frac{2a^2}{x_0}$；令 $y=0$，得 $x=2x_0$.

$\therefore$ 切线与两坐标轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2a^2$，即曲线 $xy=a^2(a\neq0)$ 在其上任意一点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积等于常数 $2a^2$.

4-1. A 【解析】如图，设直线 m 平行于直线 l，则直线 m 的斜率为 2. 当直线 m 与函数 $f(x)$ 的图象相切，点 P 为切点时，点 P 到直线 $l:y=2x$ 的距离最小，设切点

P 的坐标为(x_0,y_0).



因为$f'(x)=2e^{2x}$,所以$f'(x_0)=2e^{2x_0}=2$,解得$x_0=0$,又(x_0,y_0)在函数$f(x)=e^{2x}$的图象上,则$y_0=e^{2x_0}=1$,故切点坐标为$(0,1)$. 切点到直线$l:2x-y=0$的距离$d=\frac{|2\times0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,则点$P$到直线$l:y=2x$的距离的最小值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

4-2. D 【解析】由$x_1^2-\ln x_1-y_1=0$,得$y_1=x_1^2-\ln x_1$,又$x_2-y_2-4=0$,则$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$的最小值可转化为曲线$y=x^2-\ln x(x>0)$上的点与直线$x-y-4=0$上的点的距离的平方的最小值.

由$y=x^2-\ln x(x>0)$,得$y'=2x-\frac{1}{x}$.

又与直线$x-y-4=0$平行的直线的斜率为1,

$\therefore$ 令$2x-\frac{1}{x}=1$,解得$x=1$或$x=-\frac{1}{2}$(舍),可得切点为$(1,1)$时切线与直线$x-y-4=0$平行,

则点$(1,1)$到直线$x-y-4=0$的距离的平方,即为$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$的最小值,

$\therefore (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$的最小值为$\left(\frac{|-4|}{\sqrt{1+1}}\right)^2=8$. 故选 D.

5-1. D 【解析】因为$f(x)=\frac{x+a}{e^x}$,所以$f'(x)=\frac{e^x-(x+a)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x-a}{e^x}$,所以$f'(0)=\frac{1-a}{e^0}=-1$,所以$a=2$. 故选 D.

5－2. 2 【解析】由 $f(x)=e^x+\frac{1}{3}x^3f'(0)+x$，得 $f'(x)=e^x+x^2f'(0)+1$，

则 $f'(0)=e^0+1=2$.

5－3. $-\sqrt{3}$ 【解析】$f(x)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x+\cos x$，则 $f'(x)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\sin x$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.

巩固练

1. A 【解析】因为 $s'=60-gt$，所以当 $t=4$ s 时，$s'=20$ m/s.

2. D 【解析】因为 $f(x)=f'(1)x^3-2x$，所以 $f'(x)=3f'(1)x^2-2$，令 $x=1$，得 $f'(1)=3f'(1)\times1-2$，解得 $f'(1)=1$. 故选 D.

3. B 【解析】与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直的直线的斜率为 2.

设直线 l 与曲线 $y=e^x+x+1$ 相切于点 $P(x_0,y_0)$，因为 $y'=e^x+1$，

所以 $e^{x_0}+1=2$，得 $x_0=0$，$y_0=2$，

所以直线 l 的方程为 $y-2=2x$，即 $y=2x+2$.

当 $x=0$ 时，$y=2$，当 $y=0$ 时，$x=-1$，

所以直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times|-1|\times2=1$.

故选 B.

4. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ 【解析】$\because y'=(\sin x)'=\cos x$，$\therefore k_l=\cos x$，$\therefore -1\leqslant k_l\leqslant1$，$\therefore \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

5. $y=-x+1$ 或 $y=0$ 【解析】设切点为 $(t,(t^2-2t+1)e^t)$，因为 $f'(x)=(x^2-$

$2x+1+2x-2)e^x=(x^2-1)e^x$,

所以 $f'(t)=(t^2-1)e^t$,切线方程为 $y-(t^2-2t+1)e^t=(t^2-1)e^t(x-t)$,

将$(1,0)$代入上式,得 $0-(t^2-2t+1)e^t=(t^2-1)e^t(1-t)$,即 $(t-1)^2e^t=(t+1)(t-1)^2e^t$,

由于 $e^t>0$,故上式可整理为 $(t-1)^2=(t+1)(t-1)^2$,即 $(t+1)(t-1)^2-(t-1)^2=t(t-1)^2=0$,解得 $t=0$ 或 $t=1$,

所以切线方程为 $y-(0^2-2\times0+1)e^0=(0^2-1)e^0(x-0)$ 或 $y-(1^2-2\times1+1)e^1=(1^2-1)e^1(x-1)$,

即 $y=-x+1$ 或 $y=0$.

6.【解】(1)由 $f(x)=k(x+1)e^{-x}+x^2$,可得 $f'(x)=k[e^{-x}-(x+1)e^{-x}]+2x=-kxe^{-x}+2x$.

(2)当 $k=e$ 时,$f(1)=3$,

由(1)得 $f'(x)=-xe^{1-x}+2x$,

所以 $f'(1)=1$,

所以函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-3=1\cdot(x-1)$,即 $x-y+2=0$.

7. B 【解析】对 $y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$ 求导得 $y'=(n+1)\cdot x^n$.

令 $x=1$,得曲线在点$(1,1)$处的切线的斜率 $k=n+1$,

$\therefore$ 曲线在点$(1,1)$处的切线方程为 $y-1=(n+1)(x-1)$.

令 $y=0$,得 $x_n=\frac{n}{n+1}$,

$\therefore x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

8. A 【解析】设与直线 $2x-y+3=0$ 平行且与曲线 $y=2\ln x$ 相切的直线的方程为 $2x-y+m=0(m\neq3)$.

设切点为 $P(x_0,y_0)$,对函数 $y=2\ln x$

求导得 $y'=\dfrac{2}{x}$.

由 $\dfrac{2}{x_0}=2$，可得 $x_0=1$，则 $y_0=2\ln 1=0$，

所以切点为 $P(1,0)$.

则点 P 到直线 $2x-y+3=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2-0+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$.

$\therefore$ 曲线 $y=2\ln x$ 上的点到直线 $2x-y+3=0$ 的最短距离为 $\sqrt{5}$.

9. 1　【解析】由 $f(x)=e^{2x}+ax$，

得 $f'(x)=2e^{2x}+a$.

又 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $2x-y+b=0$，则 $f'(0)=2+a=2$，得 $a=0$，

又 $f(0)=1$，则有 $0-1+b=0$，得 $b=1$，所以 $a+b=1$.

10. $(1,+\infty)$　【解析】由函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+2x-3\ln x$，得 $f'(x)=x+2-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x}(x>0)$，

则 $f'(x)>0$，即 $x^2+2x-3>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-3$（舍去），

故 $f'(x)>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$.

11. -6　【解析】令 $g(x)=(x-2)(x-3)(x-4)$，则 $f(x)=(x-1)g(x)$，所以 $f'(x)=(x-1)'\cdot g(x)+(x-1)\cdot g'(x)=g(x)+(x-1)\cdot g'(x)$，所以 $f'(1)=g(1)+(1-1)\cdot g'(1)=g(1)=(1-2)\times(1-3)\times(1-4)=-6$.

12. 5　【解析】依题意设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在公共点 (x_0,y_0) 处的切线相同.

$\because f(x)=x^2-m, g(x)=6\ln x-4x$，

$\therefore f'(x)=2x, g'(x)=\dfrac{6}{x}-4$，

$\therefore \begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0), \end{cases}$

即$\begin{cases}x_0^2-m=6\ln x_0-4x_0,\\2x_0=\dfrac{6}{x_0}-4,\end{cases}$

即$\begin{cases}m=-6\ln x_0+x_0^2+4x_0,\\x_0=1\text{ 或 }x_0=-3(\text{舍}),\end{cases}$

$\therefore x_0=1,m=5.$

13. ABC 【解析】对于 A，$\left(x^3-\dfrac{1}{x}\right)'=3x^2+\dfrac{1}{x^2}$，故选项 A 正确.

对于 B，方法一：$\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1-\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)}{2}$，$\left(-\dfrac{1}{2}\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\right)'=\dfrac{1}{2}\sin\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\times4=2\sin\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$. 方法二：$\left(\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)'=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\times2=2\sin\left(4x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$，故选项 B 正确.

对于 C，$(2^x)'=2^x\ln 2$，故选项 C 正确.

对于 D，$(x\cdot\cos x)'=\cos x-x\sin x$，故选项 D 错误. 故选 ABC.

14. B 【解析】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+x-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\ln x+x-1)'}{(x^2+x-2)'}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}.$

6.2　利用导数研究函数的性质

6.2.1　导数与函数的单调性

易错记

1-1. C 【解析】由题可得函数的定义域为$\{x|x>0\}$. 因为$y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x+2$，所以

$y'=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$，令 $y'>0$，得 $x>1$，所以函数的单调递增区间为 $[1,+\infty)$，故选 C.

2-1. C 【解析】由 $f(x)=e^x(x^2+a)$，得 $f'(x)=e^x(x^2+2x+a)$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减，所以 $f'(x)=e^x(x^2+2x+a)\leqslant 0$ 在 $[-2,2]$ 上恒成立，即 $a\leqslant -x^2-2x$ 在 $[-2,2]$ 上恒成立（提示：参变分离），由于 $-x^2-2x=-(x+1)^2+1\geqslant -8$，则 $a\leqslant -8$. 当 $a=-8$ 时，$f'(x)=e^x(x^2+2x-8)=e^x[(x+1)^2-9]$ 不恒为零（提示：注意检验），所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-8]$.

2-2. 【解】函数 $f(x)=ax^3+2x^2-x-1$ 的导函数 $f'(x)=3ax^2+4x-1$. 依题意有 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，故 $\begin{cases}a<0,\\16+12a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -\frac{4}{3}$. 经检验，当 $a=-\frac{4}{3}$ 时，满足 $f'(x)=0$ 的点为有限个，从而实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$.

题型诀

1-1. A 【解析】由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$，可得 $f'(x)=x^2+x=x(x+1)$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$ 或 $x<-1$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$. 故选 A.

1-2. BC 【解析】由 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$，$x>0$ 且 $x\neq 1$，得 $x=e$，当 $x\in(0,1)\cup(1,e)$ 时，$f'(x)<0$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$ 和 $(1,e)$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(e,+\infty)$. 故选 BC.

1-3. 【解】由题可得 $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in(-\pi,\pi)$，

令 $f'(x)>0$，得 $-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$；

令 $f'(x)<0$，得 $-\pi<x<-\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{4}<x<\pi$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\pi,-\frac{3\pi}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$.

2-1. D 【解析】由 $f'(x)$ 的图象可知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增. 满足该函数单调性的只有选项 D.

2-2. A 【解析】由 $y=f(x)$ 的图象知，当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的单调性为先增后减，则 $y=f'(x)$ 的函数值先正后负；当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调性为先增后减，故 $y=f'(x)$ 的函数值先正后负. 故选 A.

2-3. D 【解析】对于选项 A，若直线是 $f'(x)$ 图象，由当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 不符合题意；

对于选项 B，若呈单调递减趋势的图象是 $f'(x)$ 图象，由 $f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 单调递增，故 B 不符合题意；

对于选项 C，若上方曲线是 $f'(x)$ 图象，由 $f'(x)>0$ 可知 $f(x)$ 单调递增，故 C 不符合题意；

对于选项 D，若上方曲线是 $f'(x)$ 图象，由 $f'(x)\geqslant 0$ 可知，$y=f(x)$ 的图象应呈单调递增趋势，若下方曲线是 $f'(x)$ 图象，由 $f'(x)\leqslant 0$ 可知，$y=f(x)$ 的图象应呈单调递减趋势，故 D 符合题意.

故选 D.

3-1. 【解】(1) 由题意可得，$f'(x)=2x-$

$2+\frac{a}{x}(x>0)$. 因为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 垂直,

所以 $f'(1)=2-2+a=-1$,解得 $a=-1$.

(2)$f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{2x^2-2x+a}{x}$,$x>0$,

对于方程 $2x^2-2x+a=0$,其判别式 $\Delta=4-8a$.

①当 $\Delta\leqslant 0$,即 $a\geqslant\frac{1}{2}$时,$f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为 0,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

②当 $\Delta>0$,即 $0<a<\frac{1}{2}$时,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}$,$x_2=\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}$,

又 $0<a<\frac{1}{2}$,故 $x_2>x_1>0$,

当 $x\in\left(0,\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 或 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减.

综上所述,当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$,$\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 上单调递减.

3-2.【解】(1)由题意可得 $g'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$,$g(0)=0$.

函数 $g(x)$ 的图象在 $x=0$ 处切线的斜率 $k=g'(0)=1$,则切线方程为 $y=x$.

(2)依题意可得 $f'(x)=e^x+xe^x-a(x+1)=(x+1)(e^x-a)$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$e^x-a>0$. 由 $f'(x)>0$,得 $x+1>$

0，即 $x>-1$，由 $f'(x)<0$，得 $x+1<0$，即 $x<-1$.

即函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\ln a$.

①当 $\ln a=-1$，即 $a=e^{-1}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，且 $f'(x)$ 不恒为 0，从而函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $\ln a<-1$，即 $0<a<e^{-1}$ 时，

由 $f'(x)>0$，得 $x>-1$ 或 $x<\ln a$，由 $f'(x)<0$，得 $\ln a<x<-1$，故函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 和 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递增，在 $(\ln a,-1)$ 上单调递减；

③当 $\ln a>-1$，即 $a>e^{-1}$ 时，

由 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$ 或 $x<-1$，

由 $f'(x)<0$，得 $-1<x<\ln a$，

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-1,+\infty)$，单调递减区间是 $(-\infty,-1)$；

当 $0<a<e^{-1}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,\ln a)$，$(-1,+\infty)$，单调递减区间是 $(\ln a,-1)$；

当 $a=e^{-1}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>e^{-1}$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1)$，$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间是 $(-1,\ln a)$.

4-1. AC 【解析】定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=x-\dfrac{9}{x}=\dfrac{x^2-9}{x}$，由 $f'(x)\geqslant 0$ 得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[3,+\infty)$，由 $f'(x)\leqslant 0$ 得函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,3]$，因为函数 $f(x)$ 在区间 $[m-1,m+1]$ 上具有单调性，

所以$\begin{cases}m-1>0,\\ m+1\leqslant 3\end{cases}$或 $m-1\geqslant 3$，解得 $1<m\leqslant 2$ 或 $m\geqslant 4$. 结合选项可得 A，C 正确. 故选 AC.

4-2. A 【解析】$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x<1$ 时，有 $a>1$.

当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)=2x-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^3-4+ax}{x^2}\geqslant 0$ 恒成立，

令 $g(x)=2x^3+ax-4$，$x\in[1,+\infty)$，

则 $g'(x)=6x^2+a$.

$\because a>0$，$\therefore g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(1)=2+a-4=a-2$.

要使当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，只需满足 $a-2\geqslant 0$ 即可，解得 $a\geqslant 2$.

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$\therefore$ 还需要满足 $a\leqslant 1+\dfrac{4}{1}+a\ln 1$，即 $a\leqslant 5$.

综上，实数 a 的取值范围是 $[2,5]$. 故选 A.

4-3. D 【解析】$\because f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}ax^2$，

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{x}+ax$，若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内存在单调递增区间，则 $f'(x)>0$，$x\in(1,2)$ 有解，故存在 $x\in(1,2)$ 使 $a>-\dfrac{1}{x^2}$，

令 $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，

则 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)>g(1)=-1$，故 $a>-1$. 故选 D.

4-4. 【解】方法一（直接法）：

$f'(x)=x^2-ax+a-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=a-1$.

当 $a-1\leqslant 1$，即 $a\leqslant 2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；

当 $a-1>1$，即 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,$

1)和$(a-1,+\infty)$上单调递增,在$(1,a-1)$上单调递减,

由题意知$(1,4)\subseteq(1,a-1)$且$(6,+\infty)\subseteq(a-1,+\infty)$,

所以$4\leqslant a-1\leqslant 6$,即$5\leqslant a\leqslant 7$.

故实数a的取值范围为$[5,7]$.

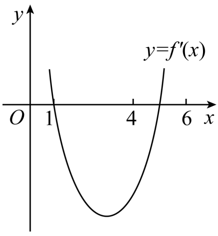
方法二(数形结合法):

$f'(x)=(x-1)[x-(a-1)]$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

因为在$(1,4)$内,$f'(x)\leqslant 0$,

在$(6,+\infty)$内,$f'(x)\geqslant 0$,

且$f'(x)=0$有一实数根为$x=1$,所以另一实数根在$[4,6]$上,如图所示.



所以$\begin{cases}f'(4)\leqslant 0,\\ f'(6)\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}3\times(5-a)\leqslant 0,\\ 5\times(7-a)\geqslant 0,\end{cases}$所以$5\leqslant a\leqslant 7$.

故实数a的取值范围为$[5,7]$.

方法三(转化为不等式的恒成立问题):

$f'(x)=x^2-ax+a-1$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

因为$f(x)$在$(1,4)$上单调递减,

所以$f'(x)\leqslant 0$在$(1,4)$上恒成立,

即$a(x-1)\geqslant x^2-1$在$(1,4)$上恒成立,所以$a\geqslant x+1$.

因为$2<x+1<5$,所以当$a\geqslant 5$时,$f'(x)\leqslant 0$在$(1,4)$上恒成立.

因为$f(x)$在$(6,+\infty)$上单调递增,

所以$f'(x)\geqslant 0$在$(6,+\infty)$上恒成立,所以$a\leqslant x+1$.

因为$x+1>7$,所以当$a\leqslant 7$时,$f'(x)\geqslant 0$在$(6,+\infty)$上恒成立.

综上知$5\leqslant a\leqslant 7$. 经检验$a=5$或$a=7$符合题意,故实数a的取值范围为$[5,7]$.

5-1. ABD 【解析】由$f(x)=xe^x$,得

$f'(x)=(x+1)e^x$,所以当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立,故 A 正确;

因为 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)=x_1x_2e^{x_1}-x_1x_2e^{x_2}=x_1x_2(e^{x_1}-e^{x_2})$,由 $0<x_1<x_2$ 知,$e^{x_1}<e^{x_2}$,$x_1x_2(e^{x_1}-e^{x_2})<0$,即 $x_2f(x_1)<x_1f(x_2)$,故 B 正确;

令 $g(x)=f(x)-x$,则 $g'(x)=f'(x)-1=(x+1)e^x-1>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x_1)<g(x_2)$,即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$,得 $f(x_1)+x_2<f(x_2)+x_1$,故 C 错误;

因为 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)-2x_2f(x_1)=x_1f(x_1)-x_2f(x_1)+x_2f(x_2)-x_2f(x_1)$,由 B 选项正确知,$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)-2x_2f(x_1)>x_1f(x_1)-x_2f(x_1)+x_2f(x_2)-x_1f(x_2)=(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]$,由 $0<x_1<x_2$ 及 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增知,$(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$,故有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>2x_2f(x_1)$,故 D 正确. 故选 ABD.

5-2.【证明】令 $f(x)=e^x-x-1(x\geqslant0)$,则 $f'(x)=e^x-1\geqslant0$ 恒成立,且只在 $x=0$ 时,$f'(x)=0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$,有 $f(x)\geqslant f(0)$,而 $f(0)=0$,

$\therefore f(x)\geqslant0$,即 $e^x\geqslant x+1(x\geqslant0)$.

令 $g(x)=x-\sin x(x\geqslant0)$,则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$ 恒成立,且 $g'(x)$ 不恒等于 0,

$\therefore g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)\geqslant g(0)=0$,

即 $x-\sin x\geqslant0(x\geqslant0)$,

$\therefore x+1\geqslant\sin x+1(x\geqslant0)$.

综上,$e^x\geqslant x+1\geqslant\sin x+1(x\geqslant0)$.

5-3. (1)【解】因为函数 $f(x)=\ln(x+1)(x>-1)$,所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$,

所以 $f'(0)=1$，又 $f(0)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x$.

(2)【证明】设 $g(x)=\ln(x+1)-x(x>-1)$.

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=\dfrac{-x}{x+1}$，

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g(0)=0$，故 $g(x)\leqslant 0$，即当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x(*)$.

令 $h(x)=x-a^2e^x+a$，$x>-1$，

则 $h'(x)=1-a^2e^x$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=-2\ln a\leqslant 0$，

当 $-2\ln a\leqslant -1$ 即 $a\geqslant\sqrt{e}$ 时，$h'(x)<0$，

$h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)<h(-1)=-1-\dfrac{a^2}{e}+a=\dfrac{-e-a^2+ae}{e}<0$；

当 $-2\ln a>-1$ 即 $1\leqslant a<\sqrt{e}$ 时，$h(x)$ 在 $(-1,-2\ln a)$ 上单调递增，在 $(-2\ln a,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(-2\ln a)=-2\ln a+a-1$，

令 $\varphi(a)=2\ln a-a+1$，$1\leqslant a<\sqrt{e}$，$\varphi'(a)=\dfrac{2}{a}-1>\dfrac{2}{\sqrt{e}}-1>0$，

所以 $\varphi(a)$ 在 $[1,\sqrt{e})$ 上单调递增，有 $\varphi(a)\geqslant\varphi(1)=0$，所以 $h(x)\leqslant 0$，

故 $a\geqslant 1$ 时，$h(x)\leqslant 0$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立，即 $x\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 恒成立，

由 $(*)$ 可知 $\ln(x+1)\leqslant x$，

因此，当 $a\geqslant 1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$.

6-1. B 【解析】令 $h(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$，则 $h'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $e^{-x}f(x^2+x)>e^{x^2-2}f(2)$ 可写成 $\dfrac{f(x^2+x)}{e^{x^2+x}}>\dfrac{f(2)}{e^2}$，即

$h(x^2+x)>h(2)$，所以 $x^2+x>2$，解得 $x<-2$ 或 $x>1$，即原不等式的解集为 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$，故选 B.

6-2. D 【解析】设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，则 $x=\mathrm{e}$，

所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，又 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$，$b=\dfrac{\ln 2}{2}=\dfrac{\ln 4}{4}=f(4)$，$c=\dfrac{\ln 3}{3}=f(3)$，

所以 $f(\mathrm{e})>f(3)>f(4)$，

即 $b<c<a$. 故选 D.

6-3. A 【解析】令 $y=f(x)-\ln x$，则 $y'=f'(x)-\dfrac{1}{x}=\dfrac{xf'(x)-1}{x}(x>0)$.

$\because xf'(x)<1$，$\therefore y'<0$，

即 $y=f(x)-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(2)-\ln 2<f(1)-\ln 1$，即 $f(2)-f(1)<\ln 2$.

6-4. A 【解析】令 $g(x)=f(x)\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，

而 $g(1)=0$，

且在 $(0,1)$ 上，$\ln x<0$，$g(x)>0$，

所以 $f(x)<0$；

在 $(1,+\infty)$ 上，$\ln x>0$，$g(x)<0$，

所以 $f(x)<0$.

由 $f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，可知 $f(1)<0$，

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上，$f(x)<0$. 又函数 $f(x)$ 为偶函数，$\therefore$ 在 $(-\infty,0)$ 上，$f(x)<0$.

不等式 $(x-1)f(x)<0$ 等价于 $\begin{cases}x-1>0,\\ f(x)<0,\end{cases}$ $\therefore x\in(1,+\infty)$. 故选 A.

巩固练

1. B 【解析】对于 $y=xe^x,x>0,y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)>0$,

$\therefore y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

2. B 【解析】由题图可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(3,5)$ 上单调递减,在 $(-1,3),(5,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(-1)<f(3),f(3)>f(5)$. 故选 B.

3. D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{(-2x-1)(x-1)}{x},x>0.$

令 $f'(x)=0$,则 $x=1$.

$x=1$ 把函数 $f(x)$ 的定义域划分为两个区间,$f'(x)$ 在各区间上的正负,以及 $f(x)$ 的单调性如表所示.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增		单调递减

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$. 故选 D.

4. D 【解析】函数 $f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$ 在 $(1,2)$ 上单调递减,则 $f'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{a}{x}\leqslant 0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立,所以 $a\geqslant 2x+\frac{2}{x}$ 在 $(1,2)$ 上恒成立,设函数 $h(x)=2x+\frac{2}{x}$,则 $h'(x)=2-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^2-2}{x^2}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^2}$,所以 $h'(x)>0$ 在 $(1,2)$ 上恒成立,所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,所以 $h(x)<h(2)=5$,

所以 $a\geqslant 5$,

则实数 a 的取值范围是 $[5,+\infty)$.

故选 D.

5. D 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,由

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+2x+1$，得 $f'(x)=x^2+2ax+2$，

因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+2x+1$ 是增函数，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即 $x^2+2ax+2\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以方程 $x^2+2ax+2=0$ 的判别式 $\Delta=4a^2-8\leqslant 0$，解得 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$，经检验，当 $a=\pm\sqrt{2}$ 时均满足题意. 故选 D.

6.【解】(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-2x-1$，定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)>0$，即 $e^x-2>0$，解得 $x>\ln 2$；

令 $f'(x)<0$，即 $e^x-2<0$，解得 $x<\ln 2$，

$\therefore$ 当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln 2,+\infty)$，单调递减区间是 $(-\infty,\ln 2)$.

(2) $\because f(x)=e^x-ax-1$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore f'(x)=e^x-a$.

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore f'(x)=e^x-a\geqslant 0$ 恒成立.

$\because x\in\mathbf{R}$ 时，$e^x\in(0,+\infty)$，

$\therefore a\leqslant 0$，即 a 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

7. C 【解析】由题意，

令 $g(x)=f(x)\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

于是其导数 $g'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$.

又 $f'(x)\cos x>f(x)\sin x$ 恒成立，

即 $f'(x)\cos x-f(x)\sin x>0$，所以 $g'(x)>0$，即函数 $g(x)$ 为增函数.

对于选项 A，由 $\frac{\pi}{3}>\frac{\pi}{4}$，有 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，即 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}>f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$，

于是 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故 A 正确；

对于选项 B，由 $\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{6}$，有 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)>$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，即$f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}>f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}$，

于是$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{6}}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，故 B 正确；

对于选项 C，由 $1>\frac{\pi}{6}$，有 $g(1)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，即$f(1)\cos 1>f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}$，于是$f(1)\cos 1>\frac{\sqrt{3}}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，无法比较 $f(1)\cos 1$ 与$\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的大小关系，故 C 错误；

对于选项 D，由 $\frac{\pi}{3}>1$，有 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g(1)$，即$f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}>f(1)\cos 1$，于是$\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)>f(1)\cos 1$，即 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>2\cos 1\cdot f(1)$，故 D 正确. 故选 C.

8. B 【解析】$a-c=e^{0.03}-1-\tan 0.03$，

令 $f(x)=e^x-1-\tan x=\frac{e^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，

令 $g(x)=e^x\cos x-\cos x-\sin x$，

则 $g'(x)=(e^x-1)(\cos x-\sin x)$，

当 $0<x<\frac{\pi}{4}$时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增，

又 $g(0)=e^0\cos 0-\cos 0-\sin 0=1-1-0=0$，所以 $g(x)>0$，

又 $\cos x>0$，所以 $f(x)>0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上恒成立，

所以 $f(0.03)=e^{0.03}-1-\tan 0.03>0$，即 $e^{0.03}-1>\tan 0.03$，即 $a>c$，

令 $h(x)=\ln(1+x)-x$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，

所以 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$，

因为 $0<x<\frac{\pi}{2}$，所以 $h'(x)=\frac{-x}{1+x}<0$，所

以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

所以 $\ln(1+0.03)=\ln 1.03<0.03$，

令 $m(x)=x-\tan x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $m'(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$，

因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $m'(x)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}<0$，

故 $m(x)=x-\tan x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $m(x)<m(0)=0$，

即 $x<\tan x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

当 $x=0.03$ 时，$0.03<\tan 0.03$，

故 $\ln 1.03<0.03<\tan 0.03$，即 $b<c$，

综上，$a>c>b$.

9. D 【解析】构造函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $h(-x)=\dfrac{f(-x)}{g(-x)}=\dfrac{-f(x)}{g(x)}=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数.

又 $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$，

故当 $x<0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增.

又 $h(3)=\dfrac{f(3)}{g(3)}=0$，所以 $h(-3)=0$，当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$h(x)<0$，此时 $f(x)g(x)<0$.

因为函数 $h(x)$ 为奇函数，所以当 $x\in(0,3)$ 时，$h(x)<0$，此时 $f(x)g(x)<0$.

综上，不等式 $f(x)g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$. 故选 D.

10. $(-\infty,2e^2)$ 【解析】因为 $f(x)=(x-$

$1)e^x-mx$，所以 $f'(x)=xe^x-m$. 因为 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上存在单调递增区间，所以存在 $x\in[1,2]$，使得 $f'(x)>0$，即存在 $x\in[1,2]$，使得 $m<xe^x$. 令 $g(x)=xe^x, x\in[1,2]$，则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$ 恒成立，所以 $g(x)=xe^x$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $g(x)_{max}=g(2)=2e^2$，所以 $m<2e^2$，故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,2e^2)$.

11. $(\ln 2,+\infty)$ 【解析】令 $g(x)=f(x)+\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=f'(x)+\frac{1}{x}>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(2)=f(2)+\ln 2=0$. 由不等式 $f(e^x)+x>0$，可得 $g(e^x)>g(2)$，所以 $e^x>2$，解得 $x>\ln 2$，即不等式 $f(e^x)+x>0$ 的解集为 $(\ln 2,+\infty)$.

12. AC 【解析】由图可知，$f'(x)$ 的图象与 x 轴有三个交点，交点的横坐标分别为 $-1,0,1$，

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1),(0,1)$ 上单调递减，在区间 $(-1,0),(1,+\infty)$ 上单调递增，故 A，C 正确，B，D 错误. 故选 AC.

13. BCD 【解析】$f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})=\ln(e^x+e^{-x})$，因为 $e^x+e^{-x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，所以 $f(x)$ 的值域为 $[\ln 2,+\infty)$，A 错误；

$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\ln(e^{-x}+e^x)=f(x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，B 正确；

$y=f(x+1)$ 的图象可看成由 $f(x)$ 的图象向左平移一个单位长度得到，又

$f(x)$的图象关于 y 轴对称，则 $y=f(x+1)$的图象关于直线 $x=-1$ 对称，C 正确；

令 $g(x)=e^{x}+e^{-x}$，则 $g'(x)=e^{x}-e^{-x}$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增且 $g(x)>0$，

又 $y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上为增函数，所以 $f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为 $2=\log_2 4>\log_2 3>0$，

所以 $f(2)>f(\log_2 3)$，

又 $f(x)$是偶函数，

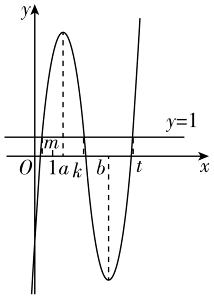
则 $f(-2)=f(2)>f(\log_2 3)$，D 正确.

故选 BCD.

14. ABC 【解析】根据导函数 $f'(x)$的图象，可知 $f'(a)=0$，$f'(b)=0$，$x<a$ 时，$f'(x)>0$，$a<x<b$ 时，$f'(x)<0$，$x>b$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递增，在(a,b)上单调递减，在$(b,+\infty)$上单调递增，

故其大致图象如下.



则有 $m<a<k<b<t$，故 $m+k<a+b<t+k$，则 A 正确；

又可得 $f(b)<1<f(a)$，所以 B 正确；

又由导函数 $f'(x)$的图象，结合 $m<a<k<b<t$，知 $f'(m)>0$，$f'(k)<0$，$f'(t)>0$，所以 $f'(m)\cdot f'(k)\cdot f'(t)<0$，故 C 正确；

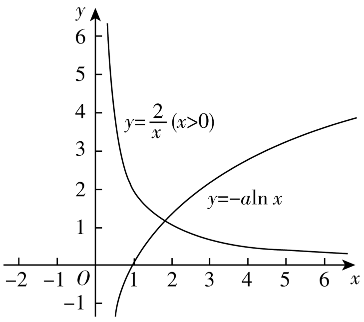
因为 $1<a<k<b<t$，则 $1<ab<kt$，$b<a^2b<kta$，

又导函数 $f'(x)$在$(b,+\infty)$上单调递

增，故 $f'(a^2b)<f'(kta)$，所以 D 错误.

故选 ABC.

15. ACD 【解析】对于 A，当 $a<0$ 时，$f(x)=a\ln x+\frac{2}{x}=0$，即 $\frac{2}{x}=-a\ln x$. 如图，函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 与 $y=-a\ln x(x>0)$ 的图象明显有交点，即 $f(x)$ 有零点，故 A 选项正确.



对于 B，$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{ax-2}{x^2}$，当 $a>0$ 时，由 $f'(x)<0$ 得，$0<x<\frac{2}{a}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，故 B 选项错误.

对于 C，当 $a=2$ 时，$f'(x)=\frac{2x-2}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)\geqslant f(1)=2$，故 C 选项正确.

对于 D，当 $a=-1$ 时，$f'(x)=-\frac{x+2}{x^2}<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$f(2x-1)-f(x)>0$ 等价于 $f(2x-1)>f(x)$，等价于 $2x-1<x$，又 $2x-1>0$，$x>0$，解得 $\frac{1}{2}<x<1$，故 D 选项正确. 故选 ACD.

6.2.2 导数与函数的极值、最值

课时 1　函数的极值

易错记

1-1. BC　【解析】$\because f'(x)=3x^2+2ax+b$，

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 10，

$\therefore \begin{cases} f'(1)=3+2a+b=0, \\ f(1)=1+a+b+a^2=10, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=4, \\ b=-11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$

当 $a=4,b=-11$ 时，$f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$，

则当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{11}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(-\dfrac{11}{3},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{11}{3}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{11}{3},1\right)$ 上单调递减，

$\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，满足题意；

当 $a=-3,b=3$ 时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，不满足题意.

综上所述，$a=4,b=-11$.

对于 A，B，$a+b=4-11=-7$，A 错误，B 正确；

对于 C，$x=-\dfrac{11}{3}$ 和 $x=1$ 分别为 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，C 正确；

对于 D，单调区间不能用“$\cup$”连接，应用“，”或“和”，D 错误. 故选 BC.

题型诀

1-1. D　【解析】$f'(x)=(x-3)^2+2x(x-3)=3(x-1)(x-3)$，

当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

$f(1)=4$.

故选 D.

1-2. A 【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$,

定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$,

由 $f'(x)<0$,解得 $0<x<1$;由 $f'(x)>0$,解得 $x>1$,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, $x=1$ 时 $f(x)$ 有极小值,极小值 $f(1)=\frac{1}{2}$. 故选 A.

1-3. CD 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f'(x)=3x^2-6x$.

令 $f'(x)>0$,得 $x<0$ 或 $x>2$;令 $f'(x)<0$,得 $0<x<2$.

∴ 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$ 上单调递增,在区间 $(0,2)$ 上单调递减. 当 $x=0$ 时,函数取得极大值 $f(0)=0$;当 $x=2$ 时,函数取得极小值 $f(2)=-4$. 故 A,B 错误,C,D 正确.

1-4. 【解】(1) 函数 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

且 $f'(x)=\frac{-x^2+x+2}{e^x}=\frac{-(x+1)(x-2)}{e^x}$,

∴ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,

又 $f(0)=-1$,即切点为 $(0,-1)$,

∴ 所求切线方程为 $y-(-1)=2(x-0)$,即 $2x-y-1=0$.

(2) ∵ $f'(x)=\frac{-(x+1)(x-2)}{e^x}$,且 $e^x>0$,

∴ 由 $f'(x)=0$ 得, $x=-1$ 或 $x=2$,

当 $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$,此时 $f(x)$ 单调递减;当 $x\in(-1,2)$ 时, $f'(x)>0$,此时 $f(x)$ 单调递增.

由 $f(x)$ 的单调性知函数 $f(x)$ 的极小值 $f(-1)=-e$,极大值 $f(2)=\frac{5}{e^2}$.

2-1. 【解】由题意可得, $f'(x)=2mxe^x-$

$2x=2x(me^{x}-1)$.

①当 $m\leqslant0$ 时，$me^{x}-1<0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$；令 $f'(x)<0$，解得 $x>0$，可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$，$f(x)$ 有极大值，且极大值 $f(0)=2-2m$，无极小值.

②当 $m>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-\ln m$.

(i)当 $-\ln m>0$，即 $0<m<1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>-\ln m$；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<-\ln m$，可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(-\ln m,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,-\ln m)$，$f(x)$ 有极值，且极大值 $f(0)=2-2m$，极小值为 $f(-\ln m)=-(\ln m)^{2}-2\ln m$.

(ii)当 $-\ln m=0$，即 $m=1$ 时，$f'(x)=2x\cdot(e^{x}-1)\geqslant0$，且 $f'(x)$ 不恒为 0，可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无极值.

(iii)当 $-\ln m<0$，即 $m>1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-\ln m$ 或 $x>0$；令 $f'(x)<0$，解得 $-\ln m<x<0$，可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln m)$，$(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\ln m,0)$，$f(x)$ 有极值，且极大值 $f(-\ln m)=-(\ln m)^{2}-2\ln m$，极小值 $f(0)=2-2m$.

综上所述，当 $m\leqslant0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,+\infty)$，极大值为 $2-2m$，无极小值；当 $0<m<1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(-\ln m,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,-\ln m)$，极大值为 $2-2m$，极小值为 $-(\ln m)^{2}-2\ln m$；当 $m=1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无极值；当 $m>1$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln m)$，$(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\ln m,0)$，极大值为 $-(\ln m)^{2}-2\ln m$，极小值为 $2-2m$.

2-2.【解】$f'(x)=2e^{2x}+(1-4m)e^{x}-2m=(2e^{x}+1)(e^{x}-2m)$, $x\in\mathbf{R}$.

所以当 $m\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无极值.

当 $m>0$ 时,令 $f'(x)>0$ 得 $x>\ln(2m)$;

令 $f'(x)<0$ 得 $x<\ln(2m)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(2m),+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,\ln(2m))$ 上单调递减,当 $x=\ln(2m)$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(\ln(2m))=2m-4m^2-2m\ln(2m)$,无极大值.

综上,当 $m\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 无极值;当 $m>0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $2m-4m^2-2m\ln(2m)$,无极大值.

3-1. A 【解析】$f'(x)=e^{x}+k$,因为函数 $f(x)=e^{x}+kx$ 在 $x=0$ 处有极值,所以 $f'(0)=e^{0}+k=0$,解得 $k=-1$. 代入检验满足题意,故选 A.

3-2. B 【解析】由已知,得 $f'(x)=\dfrac{e^{x}(x+a-1)}{(x+a)^2}(x\neq -a)$,令 $f'(x)=0$,有 $x=1-a$,

当 $x<1-a$ 时, $f'(x)<0$,当 $x>1-a$ 时, $f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $x=1-a$ 处取得极小值,为 $f(1-a)=e^{1-a}=\sqrt{e}$,

所以 $1-a=\dfrac{1}{2}$,得 $a=\dfrac{1}{2}$.

故选 B.

3-3.【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}$.

因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点,

所以 $f'(1)=1-a-b=0$,即 $a+b=1$.

此时 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}=\dfrac{x^2-ax-b}{x^2}=\dfrac{x^2-(1-b)x-b}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+b)}{x^2}$,

因为 $b>0$,所以当 $0<x<1$ 时, $f'(x)<0$;当

$x>1$ 时,$f'(x)>0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.

所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=3+\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}$.

因为 $a>0,b>0$,

所以 $\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=2\sqrt{2}$(当且仅当 $a=\sqrt{2}-1,b=2-\sqrt{2}$ 时等号成立).

故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 $3+2\sqrt{2}$.

4-1. C 【解析】由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+ax$,

得 $f'(x)=x^2-2ax+a$,

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极大值,在 $(1,2)$ 内有极小值,

所以 $\begin{cases}f'(0)=a>0,\\ f'(1)=1-a<0,\\ f'(2)=4-3a>0,\end{cases}$ 解得 $1<a<\frac{4}{3}$. 故选 C.

4-2. B 【解析】$f'(x)=ae^x-x^2$,因为函数 $f(x)=ae^x-\frac{1}{3}x^3$ 在区间 $(1,3)$ 内存在 2 个极值点,

所以 $f'(x)=ae^x-x^2=0$ 在区间 $(1,3)$ 内有两个解.

即 $a=\frac{x^2}{e^x}$ 在区间 $(1,3)$ 内有两个解.

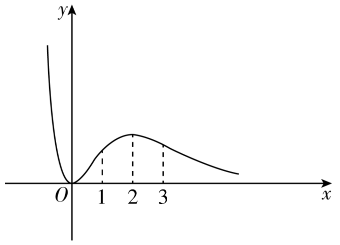
设 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$, $x\in(1,3)$, 则 $g'(x)=\frac{-x(x-2)}{e^x}$.

当 $x\in(1,2)$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增;

当 $x\in(2,3)$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增.

又 $g(1)=\frac{1}{e}$,$g(2)=\frac{4}{e^2}$,$g(3)=\frac{9}{e^3}$,

则 $g(1)<g(3)$,如图所示.



由图知，当且仅当$\frac{9}{e^3}<a<\frac{4}{e^2}$时，函数 $y=a$ 的图象与函数 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$的图象有两个交点，

此时 $a=\frac{x^2}{e^x}$在区间$(1,3)$内有两个解，故实数 a 的取值范围为$\left(\frac{9}{e^3},\frac{4}{e^2}\right)$.

故选 B.

4-3. C 【解析】由题意可得，$f'(x)=1+\ln x+ae^x(x>0)$. 函数$f(x)$没有极值点，即$f'(x)=0$ 无实数解或有唯一解（但$f'(x)$在解的两侧符号相同）. 由$f'(x)=0$ 整理得$-a=\frac{1+\ln x}{e^x}$.

令 $g(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$，$x>0$，

则 $g'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$.

令 $h(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$，则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减且 $h(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

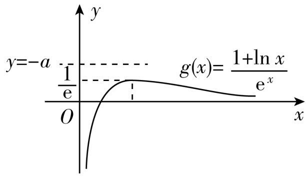
当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

故当 $x=1$ 时，$g(x)$取得极大值，

且 $g(1)=\frac{1}{e}$.

当 $x\to0^+$时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，

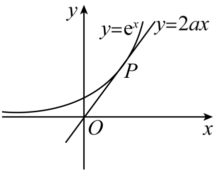
结合图象可知，$-a\geqslant\frac{1}{e}$，即 $a\leqslant-\frac{1}{e}$.



4-4. $(-1,2)$ 【解析】因为 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x-a}{x^2}(x>0)$，因为函数 $f(x)=\frac{\ln x+a}{x}$ 在区间 $\left(\frac{1}{e},e^2\right)$ 内有极值，

所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x-a}{x^2}$ 在区间 $\left(\frac{1}{e},e^2\right)$ 内有变号零点，即 $a=1-\ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{e},e^2\right)$ 内有解，而函数 $y=1-\ln x$ 在区间 $\left(\frac{1}{e},e^2\right)$ 上单调递减，所以 $a\in(-1,2)$.

4-5. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$ 【解析】由题意可知，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-2ax$. 因为函数 $f(x)$ 有极值点，所以 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有变号零点，则方程 $e^x-2ax=0$ 有实数根且 $f'(x)$ 在根的两侧符号不同. 在同一坐标系中作出函数 $y=e^x$ 的图象和直线 $y=2ax$，如图所示.



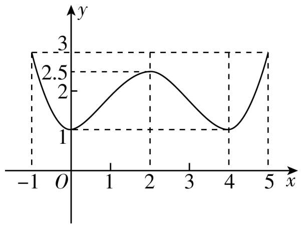
当直线 $y=2ax$ 和曲线 $y=e^x$ 相切时，

设切点为 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}2a=e^{x_0},\\ y_0=e^{x_0},\\ y_0=2ax_0,\end{cases}$

解得 $a=\frac{e}{2}$.

由图可知 $a\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.

5-1. D 【解析】由 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象，结合表格，画出 $f(x)$ 的大致图象，如图所示.



对于①，$f(x)$在区间$[-1,0]$上单调递减，所以①错误；

对于②，$f(x)$有 1 个极大值点，2 个极小值点，所以②错误；

对于③，根据函数的极值和端点值可知$f(x)$的值域为$[1,3]$，所以③正确；

对于④，如果$x\in[t,5]$时，由$f(x)$的图象可知，当$f(x)$的最小值是 1 时，t的最大值为 4，所以④正确.

故选 D.

6−1. D 【解析】$f'(x)=6(x^2-1)$，

令$f'(x)=0$，则$x=\pm1$，

当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)$的极大值为$f(-1)=4+a$，极小值为$f(1)=a-4$，且当$x\to-\infty$时，$f(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，要使$f(x)$的图象与x轴有三个交点，只需

$$\begin{cases}a+4>0,\\a-4<0,\end{cases}\text{即}-4<a<4.$$

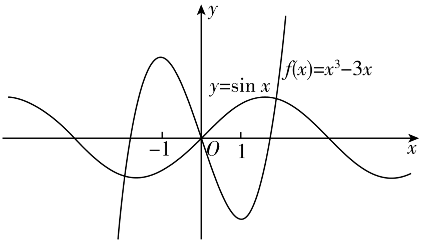
故选 D.

6−2. ABD 【解析】$f'(x)=3x^2-3$，$f'(0)=-3$，所以$f(x)$的图象在点$(0,0)$处的切线方程是$y=-3x$，即$3x+y=0$，A 正确；

当$x<-1$或$x>1$时，$f'(x)>0$，当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减，因此-1是$f(x)$的极大值点，B 正确；

显然 1 是$f(x)$的极小值点，$f(-1)=2$，

$f(1)=-2$，当 $x<-2$ 时，$f(x)<-2$，当 $x>2$ 时，$f(x)>2$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)>0$，$y=\sin x\in[-1,1]$，且 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 和 $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，两个函数的大致图象如图，因此 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 的图象有 3 个交点，即 $y=\sin x-f(x)$ 有 3 个零点，D 正确；



设 $g(x)=\sin x+f(x)=\sin x+x^3-3x$，

$g'(x)=\cos x+3x^2-3$，

令 $h(x)=g'(x)=\cos x+3x^2-3$，

则 $h'(x)=6x-\sin x$，

设 $\varphi(x)=h'(x)=6x-\sin x$，则 $\varphi'(x)=6-\cos x>0$ 恒成立，

所以 $\varphi(x)$，即 $h'(x)$ 是增函数，

而 $h'(0)=0$，

所以当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$，$x>0$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(0)=-2<0$，易知 $g'(-1)=g'(1)>0$，

所以 $g'(x)$ 存在 2 个零点，由 $g'(x)$ 的单调性知这 2 个零点就是 $g(x)$ 的 2 个极值点，C 错误.

故选 ABD.

6-3.【解】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x-\ln x-2(x>0)$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$，

令 $f'(x)>0$，则 $x>1$；

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$，

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1,+\infty)$，单调递减区间是 $(0,1)$，

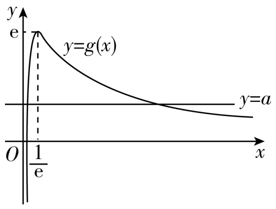
当 $x=1$ 时，函数取极小值 $f(1)=1-\ln 1-2=-1$，无极大值.

(2)令 $f(x)=ax-\ln x-2=0$，因为 $x>0$，所以 $a=\dfrac{\ln x+2}{x}$，

记 $g(x)=\dfrac{\ln x+2}{x}$，有 $g'(x)=\dfrac{-1-\ln x}{x^2}$，

令 $g'(x)>0$，则 $0<x<\dfrac{1}{e}$；令 $g'(x)<0$，则 $x>\dfrac{1}{e}$，

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递减，从而 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{e}\right)=e$，作出函数 $y=g(x)$ 的大致图象，如图所示.



因此当 $a>e$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象没有交点；

当 $a=e$ 或 $a\leqslant 0$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有 1 个交点；

当 $0<a<e$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有 2 个交点.

综上：当 $a>e$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点；当 $a=e$ 或 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 有 1 个零点；当 $0<a<e$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个零点.

6-4.【解】由题意知 $g(x)=\begin{cases}x^2e^x, x<1,\\ \dfrac{e^x}{x^2}, x\geqslant 1,\end{cases}$ 且方程 $[g(x)]^2-2ag(x)=0$ 的根分别为 $g_1(x)=0$，$g_2(x)=2a$.

当 $x<1$ 时，$g'(x)=x(x+2)e^x$，

令 $g'(x)>0$ 得 $x<-2$ 或 $0<x<1$，

令 $g'(x)<0$ 得 $-2<x<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$，$(0,1)$ 上单调递增，在 $(-2,0)$ 上单调递减，则极大值为 $g(-2)=\dfrac{4}{e^2}$，极小值为 $g(0)=0$，

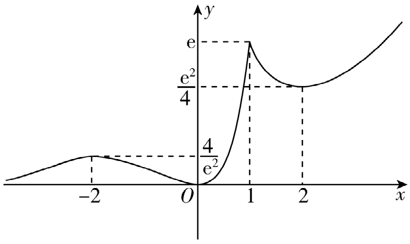
当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to0$.

当 $x>1$ 时，$g'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$，

令 $g'(x)<0$ 得 $1<x<2$，

令 $g'(x)>0$ 得 $x>2$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，极小值 $g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，结合 $x<1$ 时的单调性及两段函数的交点坐标，作出函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



显然 $g_1(x)=0$ 时有一个解，而原方程共有两个不相等的实数根，

所以，由图知 $g_2(x)=2a\in\left(\dfrac{4}{e^2},\dfrac{e^2}{4}\right)\cup(e,+\infty)$，

故实数 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{2}{e^2},\dfrac{e^2}{8}\right)\cup\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$.

巩固练

1. B 【解析】A 选项不存在极值；B 选项，对于 $y=x-e^x$，$y'=1-e^x$，令 $y'=0$，得 $x=0$，在 $(-\infty,0)$ 上，$y'>0$；在 $(0,+\infty)$ 上，$y'<0$. 故 $x=0$ 为函数 $y=x-e^x$ 的极大值点；C，D 选项不存在极值. 故选 B.

2. D 【解析】由导函数 $f'(x)$ 的图象可

知，当$-2<x<-1$时，$f'(x)<0$；当$-1<x<2$时，$f'(x)>0$；当$2<x<4$时，$f'(x)<0$；当$4<x<5$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在区间$[-2,-1]$上单调递减，故①错误；

函数$f(x)$在区间$[-1,2]$上单调递增，在区间$[2,4]$上单调递减，$[4,5]$上单调递增，

在$x=-1$和$x=4$处取得极小值，在$x=2$处取得极大值，故②③④正确．故选 D.

3. B 【解析】对$f(x)$求导得，$f'(x)=6x^2+2ax+36$，且$f(x)$在$x=2$处有极值，所以$f'(2)=0$，即$24+4a+36=0$，解得$a=-15$．所以$f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$，

经检验$a=-15$符合题意.

由$f'(x)>0$，得$x<2$或$x>3$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,2)$和$(3,+\infty)$．故选 B.

4. A 【解析】由$f'(x)=x^2+x+c=0$，得$x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=c$，$\Delta=1-4c>0$，可得$c<\frac{1}{4}$.

因为$f(x_1)=x_2$，$f(x_2)=x_1$，所以两式作差，得$\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)+\frac{1}{2}(x_2^2-x_1^2)+c(x_2-x_1)=x_1-x_2$，

则$\frac{1}{3}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+\frac{1}{2}(x_2+x_1)+c=-1$，

所以$\frac{1}{3}[(x_1+x_2)^2-x_1x_2]+\frac{1}{2}(x_1+x_2)+c=\frac{1}{3}(1-c)-\frac{1}{2}+c=-1$，解得$c=-\frac{5}{4}$．故选 A.

5. B 【解析】函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=6x-\frac{1}{x}-1=\frac{6x^2-x-1}{x}=$

$\frac{(2x-1)(3x+1)}{x}$,

$\therefore$ 当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,

$f'(x)>0$.

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的极值点,即 $f(x)$ 的极值点个数是 1. 故选 B.

6. (1)【解】函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,理由如下:

$f'(x)=\sin x+x\cos x$,

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin x>0,\cos x>0$,

所以 $f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

(2)【证明】令 $h(x)=f'(x)$,

则 $h'(x)=2\cos x-x\sin x$,

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,

又因为 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$,$f'(\pi)=-\pi<0$,

所以存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

使得 $f'(x_0)=0$,

随着 x 变化 $f'(x)$,$f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$	x_0	(x_0,π)
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上有且只有一个极值点.

7.【解】(1) 当 $a=0$ 时,$f(x)=e^x+(1-e)x-1$,所以 $f'(x)=e^x+1-e$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(e-1)$,

当 $x<\ln(e-1)$ 时 $f'(x)<0$,

当 $x>\ln(e-1)$ 时 $f'(x)>0$,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(e-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(e-1),+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln(e-1))=(1-e)\ln(e-1)+e-2$，无极大值.

(2)已知 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有解，设 x_0 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的一个零点，

由 $f(0)=f(1)=0$，知 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,1)$ 内都不是单调函数.

设 $h(x)=f'(x)=e^x-2ax+a+1-e$，则 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$，$(x_0,1)$ 内均存在零点，即 $h(x)$ 至少有两个零点.

$h'(x)=e^x-2a(0<x<1)$，

当 $a\geqslant\frac{e}{2}$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$h(x)$ 不可能有两个及以上零点，舍去；

当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$h(x)$ 不可能有两个及以上零点，舍去；

当 $\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$ 时，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln(2a)$，$x\in(0,1)$，

当 $0<x<\ln(2a)$ 时，$h'(x)<0$，

当 $\ln(2a)<x<1$ 时 $h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(2a),1)$ 上单调递增，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在最小值 $h(\ln(2a))$.

若 $h(x)$ 有两个零点，则 $h(\ln(2a))<0$，$h(0)>0$，$h(1)>0$，

而 $h(\ln(2a))=3a-2a\ln(2a)+1-e\left(\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}\right)$，

令 $t=2a(1<t<e)$，则 $h(\ln(2a))=\varphi(t)=\frac{3}{2}t-t\ln t+1-e(1<t<e)$，

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{2}-\ln t$，$\varphi(t)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},e)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(\sqrt{e})=\sqrt{e}+1-e<0$，即

$h(\ln(2a))<0$ 恒成立，

由 $h(0)=a-\mathrm{e}+2>0, h(1)=1-a>0$，得 $\mathrm{e}-2<a<1$，即 a 的取值范围是 $(\mathrm{e}-2, 1)$.

8. B 【解析】令 $f'(x)=(2-a)(x-1)(\mathrm{e}^x-a)=0$，得 $x=\ln a, x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，解得 $a\in(\sqrt{\mathrm{e}},\mathrm{e})$. 由题意得 $x\in\left(\frac{1}{2},\ln a\right)$ 时，$f'(x)>0, x\in(\ln a,1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $2-a>0$，得 $a<2$. 综上，$a\in(\sqrt{\mathrm{e}},2)$. 故选 B.

9. D 【解析】由题意函数 $g(x)=f(x)-b$ 有三个零点，

令函数 $g(x)=f(x)-b=0$，即方程 $f(x)=b$ 有三个根，

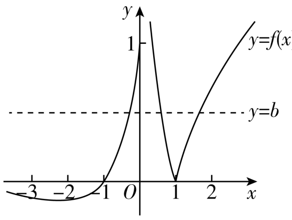
当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x(x+1)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(x+2)$，

由 $f'(x)<0$，得 $x+2<0$，即 $x\in(-\infty,-2)$，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，

由 $f'(x)>0$，得 $x+2>0$，即 $x\in(-2,0]$，此时 $f(x)$ 在 $(-2,0]$ 上单调递增，

当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$，当 $x=-2$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(-2)=-\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

作出 $f(x)$ 的图象如图所示，

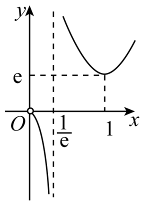


要使方程 $f(x)=b$ 有三个根，则 $b\in(0,1]$，故选 D.

10. 1 【解析】由函数图象可知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，因此 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，$x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极大值

点,因此 $x=-1,x=2$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$,所以 $x=-1,x=2$ 是方程 $3ax^2+2bx+c=0$ 的两个根,根据一元二次方程根与系数的关系有 $\begin{cases}-1+2=-\dfrac{2b}{3a},\\-1\times2=\dfrac{c}{3a}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3}{2}a,\\c=-6a.\end{cases}$ 所以 $\dfrac{f'(0)}{f'(1)}=\dfrac{c}{3a+2b+c}=1.$

11. $(-\infty,0)$ 【解析】由题意得,$f'(x)=a+a\ln x-e^x$,当 $x>0$ 且 $x\neq e^{-1}$ 时,令 $f'(x)=a+a\ln x-e^x=0$,则 $a=\dfrac{e^x}{1+\ln x}$. 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{1+\ln x}$,$x>0$,且 $x\neq e^{-1}$,则 $g'(x)=\dfrac{e^x\left(1+\ln x-\dfrac{1}{x}\right)}{(1+\ln x)^2}$. 令 $h(x)=1+\ln x-\dfrac{1}{x}$,$x>0$,易知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $h(1)=0$,$\therefore g(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 和 $(e^{-1},1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 又当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时,$g(x)<0$;当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时,$g(x)>0$,$g(1)=e$,可作出函数 $g(x)$ 的大致图象如图.



$\therefore$ 根据图象可得,当直线 $y=a$ 与函数 $g(x)$ 的图象只有一个交点时,$a<0$ 或 $a=e$.

当 $a=e$ 时,$f'(x)=e+e\ln x-e^x$,令 $P(x)=e+e\ln x-e^x$,$x>0$,则 $P'(x)=\dfrac{e}{x}-e^x$,易知 $P'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,且 $P'(1)=0$,故 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,$\therefore f'(x)\leqslant f'(1)=0$,且仅当 $x=1$ 时,$f'(x)=0$,$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,无极值点,不合题意,舍去.

经检验 $a<0$ 时符合题意. 综上所述,

实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$.

12.【解】(1)由题意得 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+x-(a+1)=\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=1$ 或 $x=a$(舍去),

当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,

所以函数 $f(x)$ 有极小值 $f(1)=-a-\dfrac{1}{2}$,无极大值.

(2)由(1)得 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-a)}{x}$.

因为 $a>0$,

①若 $0<a<1$,当 $0<x<a$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $a<x<1$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(a)=a\ln a+\dfrac{1}{2}a^2-(a+1)a=a\left(\ln a-\dfrac{1}{2}a-1\right)<0$,

极小值 $f(1)=-a-\dfrac{1}{2}<0$,又 $f(2a+2)=a\ln(2a+2)>0$,所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

②若 $a=1$,则 $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$ 且等号不恒成立,所以函数 $f(x)$ 单调递增,

此时 $f(1)=-\dfrac{3}{2}<0$, $f(4)=\ln 4>0$,

所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

③若 $a>1$,则当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $1<x<a$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(1)=-a-\frac{1}{2}<0$，

显然极小值 $f(a)<f(1)<0$，又 $f(2a+2)=a\ln(2a+2)>0$，所以函数 $f(x)$ 有 1 个零点.

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

13. (1)【解】由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=4-\frac{a}{x}-x=-\frac{x^2-4x+a}{x}$.

因为 $f(x)=4x-a\ln x-\frac{1}{2}x^2-2$ 有两个极值点 x_1,x_2，

所以方程 $f'(x)=0$，即 $x^2-4x+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根，即函数 $g(x)=x^2-4x+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，

因此只需 $\begin{cases}g(0)=a>0,\\ g(2)=4-8+a<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<4$，

即实数 a 的取值范围是 $(0,4)$.

(2)【证明】由(1)知，$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$，$0<a<4$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)=4(x_1+x_2)-a(\ln x_1+\ln x_2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)-4=16-a\ln(x_1x_2)-\frac{1}{2}[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-4=12-a\ln a-\frac{1}{2}(16-2a)=4-a\ln a+a$，因此要证 $f(x_1)+f(x_2)<6-\ln a$，即证 $4-a\ln a+a<6-\ln a$，

即证 $(1-a)\ln a+a-2<0$，

构造函数 $h(a)=(1-a)\ln a+a-2$，$0<a<4$，

则 $h'(a)=-\ln a+\frac{1-a}{a}+1=\frac{1}{a}-\ln a$，

易知 $h'(a)$ 在 $(0,4)$ 上单调递减.

又 $h'(1)=1>0$，$h'(2)=\frac{1}{2}-\ln 2=\ln\sqrt{e}-\ln 2<0$，

由函数零点存在定理可得，$\exists a_0\in(1,2)$，使得 $h'(a_0)=0$，即 $\frac{1}{a_0}=\ln a_0$，

即 $a_0\ln a_0=1$，

所以当 $a\in(0,a_0)$ 时，$h'(a)>0$，

则 $h(a)$ 单调递增；

当 $a\in(a_0,4)$ 时，$h'(a)<0$，则 $h(a)$ 单调递减，

所以 $h(a)\leqslant h(a_0)=(1-a_0)\ln a_0+a_0-2=\ln a_0-a_0\ln a_0+a_0-2=\ln a_0+a_0-3$，

又 $y=\ln a_0+a_0-3$ 在 $a_0\in(1,2)$ 上显然单调递增，所以 $\ln a_0+a_0-3<\ln 2+2-3=\ln 2-1<0$，

所以 $h(a)<0$，即 $(1-a)\ln a+a-2<0$，

故 $f(x_1)+f(x_2)<6-\ln a$.

14. AC 【解析】由题意知，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

所以 $f'(0)=1$，A 正确；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，B 错误；

由 B 选项可知，$f(x)$ 的极大值 $f(1)=\frac{1}{e}$，C 正确；

方程 $f(x)=-1$ 等价于 $\frac{x}{e^x}=-1$，即 $e^x=-x$，作出函数 $y=e^x$ 和 $y=-x$ 的大致图象（图略），根据图象易知函数 $y=e^x$ 与函数 $y=-x$ 的图象有且只有一个交点，即方程 $f(x)=-1$ 有且只有一个解，D 错误.

故选 AC.

15. AC 【解析】对于三次函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，函数

图象必穿过 x 轴，故 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=0$，A 正确.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$，当 $a^2-3b=0$ 时，方程 $f'(x)=0$ 的判别式 $\Delta>0$，故 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $f'(x_0)=0$，且 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 单调递增，故函数 $f(x)$ 不存在极值点，故 B，D 不正确.

若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，C 正确.

故选 AC.

16.【解】(1) 当 $m=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{6}$，所以 $f(1)=0$.

则当点 $(1,f(1))$ 为切点时：$f'(x)=x^2+x-1\Rightarrow f'(1)=1$，

根据函数导数的几何意义可得，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$；

当 $(1,0)$ 不是切点时：设切点为 (x_0,y_0)，则可得切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

因为 $f'(x_0)=x_0^2+x_0-1$，$y_0=f(x_0)=\frac{1}{3}x_0^3+\frac{1}{2}x_0^2-x_0+\frac{1}{6}$，所以切线方程即为 $y-\left(\frac{1}{3}x_0^3+\frac{1}{2}x_0^2-x_0+\frac{1}{6}\right)=(x_0^2+x_0-1)(x-x_0)$，

代入点 $(1,0)$ 化简可得，$4x_0^3-3x_0^2-6x_0+5=(x_0-1)^2(4x_0+5)=0$，

解得，$x_0=-\frac{5}{4}$ 或 $x_0=1$（舍去）$\Rightarrow$ 切线方程为 $y=-\frac{11}{16}x+\frac{11}{16}$.

综上可得，过点 $(1,0)$ 的切线方程为 $x-y-1=0$ 或 $11x+16y-11=0$.

(2) 由题得，$f'(x)=x^2+mx-1$，

若选①：函数 $f(x)$ 在区间 $(m,m+1)$

上是单调递减函数，则有：

$f'(x)\leqslant 0$ 在区间 $(m,m+1)$ 上恒成立，即 $x^2+mx-1\leqslant 0$ 在 $(m,m+1)$ 上恒成立，

$\therefore \begin{cases} f'(m)=m^2+m^2-1\leqslant 0, \\ f'(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1\leqslant 0, \end{cases}$

解得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$.

若选②：函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上存在单调递减区间，则有 $f'(x)<0$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上有解，

即得 $m<\dfrac{1}{x}-x$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上有解，

此时令 $g(x)=\dfrac{1}{x}-x$，因为 $g(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 上单调递减，

所以 $g(x)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$，故有 $m<\dfrac{3}{2}$.

若选③：函数 $f(x)$ 在区间 $(m,+\infty)$ 上存在极小值，则有函数 $f(x)$ 的极小值点应落在 $(m,+\infty)$ 上.

令 $f'(x)=x^2+mx-1=0$，求得 $x_1=\dfrac{-m-\sqrt{m^2+4}}{2}$，$x_2=\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}$，

此时可得，$f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，

所以 $x=x_2$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，

即得 $\dfrac{-m+\sqrt{m^2+4}}{2}>m\Rightarrow\sqrt{m^2+4}>3m$，

所以当 $m\leqslant 0$ 时，不等式恒成立，

当 $m>0$ 时，$m^2+4>9m^2$，

解得，$0<m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

综上可得，$m<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

课时 2　函数的最值

易错记

1-1.【解】(1)因为 $f'(x)=6x^2-18x+12$,

则曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程的斜率 $k=f'(0)=12$,

又 $f(0)=1$,所以切点为 $(0,1)$,

故切线方程为 $y-1=12(x-0)$,即 $y=12x+1$.

(2)因为 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$,

令 $f'(x)>0$,得 $x<1$ 或 $x>2$;令 $f'(x)<0$,得 $1<x<2$,

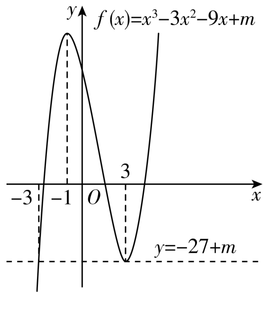
所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1),(2,+\infty)$ 上单调递增,在区间 $(1,2)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,在 $x=2$ 处取得极小值.

又 $f(-1)=-22,f(1)=6,f(2)=5,f(3)=10$,

故 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值为 10,最小值为 -22.

2-1. $[-3,3)$ 【解析】$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$,当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,当 $-1<x<3$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减,当 $x>3$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(3)=-27+m$. 又 $f(-3)=f(3)=-27+m$,作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



因为函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+m$ 在区间 $(n,+\infty)$ 上的极小值也是最小值,所以由图可知 $-3\leqslant n<3$,即 n 的取值范围是 $[-3,3)$.

1-1. A 【解析】$\because f(x)=x^4-4x^2+1, x\in(-2,2)$，$\therefore f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $x=\pm\sqrt{2}$.

$\because$ 当 $-2<x<-\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $-\sqrt{2}<x<0$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $\sqrt{2}<x<2$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x=\pm\sqrt{2}$ 处取得极小值，在 $x=0$ 处取得极大值，故 C，D 错误.

又 $f(2)=2^4-4\times2^2+1=1$，$f(-2)=(-2)^4-4\times(-2)^2+1=1$，

$f(0)=1$，$f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^4-4\times(\sqrt{2})^2+1=-3$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 既有最小值也有最大值.

故选 A.

1-2. A 【解析】因为 $f(x)=-f'(1)x-4\ln x$，所以 $f'(x)=-f'(1)-\dfrac{4}{x}(x>0)$，

则 $f'(1)=-f'(1)-4$，

解得 $f'(1)=-2$，

则 $f'(x)=2-\dfrac{4}{x}=\dfrac{2x-4}{x}$.

当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(2)=4-4\ln 2$，无最大值. 故选 A.

1-3. $2\sqrt{e}+e$ 【解析】$f'(x)=e^x(-2x+1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$. 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in$

$\left(\frac{1}{2},1\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

又$f(0)=3$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{e}$，$f(1)=e$，

所以$M=2\sqrt{e}$，$N=e$，所以$M+N=2\sqrt{e}+e$.

1-4.【解】(1)$f'(x)=3ax^2+2bx$.

依题意可得$\begin{cases}f'(2)=12a+4b=0,\\f(2)=8a+4b=-4,\end{cases}$

解得$a=1$，$b=-3$，

所以$f(x)=x^3-3x^2$，故$f(-1)=-4$.

(2)$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，$x\in[-1,4]$.

当$x\in(0,2)$时，$f'(x)<0$，

当$x\in(-1,0)\cup(2,4)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，在$[-1,0)$和$(2,4]$上单调递增.

则$f(x)$的极大值为$f(0)=0$，

又$f(4)=16$，

故$f(x)$在区间$[-1,4]$上的最大值为16.

2-1.【解】(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

当$a=-1$时，$f(x)=-\ln x+\sqrt{x}$，$f'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

当$x>4$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$的单调递增区间为$(4,+\infty)$；

当$0<x<4$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$的单调递减区间为$(0,4)$.

(2)$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+2a}{2x}$，$1\leqslant x\leqslant 4$.

当$a\leqslant -1$时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$在$[1,4]$上单调递减，

此时，$f(x)_{\min}=f(4)=2a\ln 2+2$.

当$a\geqslant -\frac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在$[1,4]$上单调递增，

此时，$f(x)_{\min}=f(1)=1$.

当$-1<a<-\frac{1}{2}$时，若$1<x<4a^2$，则$f'(x)<$

$0,f(x)$单调递减；

若 $4a^2<x<4$，则 $f'(x)>0,f(x)$单调递增，

此时，$f(x)_{\min}=f(4a^2)=a\ln(4a^2)+\sqrt{4a^2}=2a\ln(-2a)-2a.$

综上所述，

$$f(x)_{\min}=\begin{cases}2a\ln 2+2,a\leqslant -1,\\ 2a\ln(-2a)-2a,-1<a<-\dfrac{1}{2},\\ 1,a\geqslant -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

2-2.【解】(1) 当 $a=3$ 时，$f(x)=\ln x-3x-15,x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-3=\dfrac{1-3x}{x}$，

$f'(1)=-2$，又 $f(1)=-18$，

则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+18=-2(x-1)$，即 $2x+y+16=0$.

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-a=\dfrac{1-ax}{x}=0$ 可得 $x=\dfrac{1}{a}$，

当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=2-\ln a-2a^2$.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 无最大值；

当 $a>0$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=2-\ln a-2a^2$.

3-1. D　【解析】$f'(x)=\dfrac{x^2+a-2x^2}{(x^2+a)^2}=\dfrac{a-x^2}{(x^2+a)^2}$.

当 $x>\sqrt{a}$ 或 $x<-\sqrt{a}$ 时，$f'(x)<0,f(x)$ 单调

递减;

当$-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

若$a>1$,则$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大值$f(x)_{\max}=f(\sqrt{a})=\frac{\sqrt{a}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$a=\frac{3}{4}<1$,不符合题意;

若$0<a\leqslant1$,则$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最大值$f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{1+a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$a=\sqrt{3}-1$. 故选 D.

3-2. B 【解析】$f'(x)=\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}(x\neq0)$,

令$f'(x)=0$,得$x=\frac{1}{2}$,

当$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

而$f\left(\frac{1}{2}\right)=2e$,又因为函数$f(x)=\frac{e^{2x}}{x}$在区间$\left[\frac{1}{4},a\right]$上的最小值为$2e$,

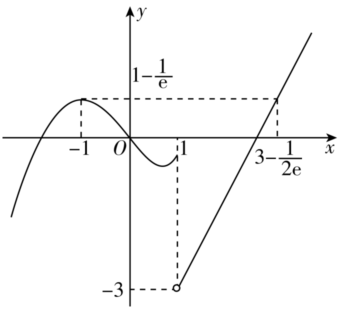
所以$a\geqslant\frac{1}{2}$. 故选 B.

3-3. $\left[-1,3-\frac{1}{2e}\right]$ 【解析】当$x\leqslant1$时,$f'(x)=(x+1)(e^x-2)$,令$f'(x)>0$,则$\ln 2<x\leqslant1$或$x<-1$;令$f'(x)<0$,则$-1<x<\ln 2$,

$\therefore$ 函数$f(x)$在$(-1,\ln 2)$上单调递减,在$(-\infty,-1)$,$(\ln 2,1]$上单调递增,$\therefore$ 函数$f(x)$在$x=-1$处取得极大值为$f(-1)=1-\frac{1}{e}$,在$x=\ln 2$处取得极小值为$f(\ln 2)=-(\ln 2)^2$,$f(1)=e-3$.

当$x>1$时,令$f(x)=2x-5\leqslant1-\frac{1}{e}$,解得$1<x\leqslant3-\frac{1}{2e}$,

作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知实数 m 的取值范围是 $\left[-1,3-\dfrac{1}{2e}\right]$.



3-4.【解】(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$,

当 $f'(x)>0$ 时，解得 $x>\dfrac{1}{2}$；当 $f'(x)<0$ 时，解得 $0<x<\dfrac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 取得极小值且为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+\ln 2$，无极大值.

(2) 因为 $g(x)=f(x)+(a-2)x=ax-\ln x$, $x>0$, $a>0$，所以 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$.

当 $\dfrac{1}{a}\geqslant e$，即 $0<a\leqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$x\in(0,e]$，则 $g'(x)\leqslant 0$，且 $g'(x)$ 不恒为 0，所以 $g(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\min}=g(e)=ae-1=2$,

解得 $a=\dfrac{3}{e}$（舍去）；

当 $0<\dfrac{1}{a}<e$，即 $a>\dfrac{1}{e}$ 时，若 $0<x<\dfrac{1}{a}$，则 $g'(x)<0$，若 $\dfrac{1}{a}<x<e$，则 $g'(x)>0$,

所以 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a=2$，解得 $a=e$，满足条件.

综上，实数 a 的值是 e.

4-1. C　【解析】因为 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$，所以 $g'(x)=x(x-2)$，当 $-1<x<0$ 时，$g'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，所以在 $[-1,1]$ 上，$g(x)_{\max}=g(0)=2$. 因为 $\forall x_1\in(0,1]$，$\exists x_2\in[-1,1]$，有 $g(x_2)\geqslant f(x_1)$，所以 $f(x)=-\ln x+\frac{a}{x}-ex+4\leqslant 2$ 在 $(0,1]$ 上恒成立，即 $a\leqslant x\ln x+ex^2-2x$ 在 $(0,1]$ 上恒成立. 令 $h(x)=x\ln x+ex^2-2x\ (0<x\leqslant 1)$，则 $h'(x)=\ln x+2ex-1$. 令 $m(x)=h'(x)=\ln x+2ex-1\ (0<x\leqslant 1)$，则 $m'(x)=\frac{1}{x}+2e>0$ 恒成立，所以 $h'(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增. 又 $h'\left(\frac{1}{e^2}\right)=-2+\frac{2}{e}-1<0$，$h'(1)=2e-1>0$，故存在唯一 $x_0\in(0,1]$，使得当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x_0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增. 又 $h'(x_0)=\ln x_0+2ex_0-1=0$，解得 $x_0=\frac{1}{e}$，所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}+e\times\left(\frac{1}{e}\right)^2-2\times\frac{1}{e}=-\frac{2}{e}$，所以 $a\leqslant-\frac{2}{e}$，即 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{2}{e}\right]$. 故选 C.

4-2. $(-\infty,1]$　【解析】由题知 $x>0$. 因为 $f(x)=\frac{e^{x-2}}{x}=\frac{e^{x-2}}{e^{\ln x}}=e^{x-\ln x-2}$，所以 $f(x)\geqslant k(x-\ln x-1)$ 恒成立，即 $e^{x-\ln x-2}\geqslant k(x-\ln x-1)$ 恒成立. 令 $h(x)=x-\ln x-1\ (x>0)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，所以在 $(0,1)$ 上，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，故 $h(x)\geqslant h(1)=0$. 令 $t=x-\ln x-1\ (t\geqslant 0)$，则 $e^{x-\ln x-2}\geqslant k(x-\ln x-1)$ 可化为 $e^{t-1}\geqslant kt$①，

当 $t=0$ 时，①式可化为 $\frac{1}{e}\geqslant 0$，此时不等式恒成立，故 $k\in\mathbf{R}$；当 $t>0$ 时，①式可化为 $k\leqslant\frac{e^{t-1}}{t}$ 恒成立，故只需 $k\leqslant\left(\frac{e^{t-1}}{t}\right)_{\min}$ 即可. 令 $g(t)=\frac{e^{t-1}}{t}(t>0)$，则 $g'(t)=\frac{(t-1)e^{t-1}}{t^2}$，当 $t\in(0,1)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，所以 $g(t)_{\min}=g(1)=1$，故 $k\leqslant 1$. 综上，k 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

4-3.【解】（1）函数 $f(x)=x(1-\ln x)=x-x\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

又 $f'(x)=-\ln x$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

（2）$f(x)>-mx^3+(m+1)x$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $x-x\ln x>-mx^3+mx+x$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $-\ln x>-mx^2+m$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

即 $\ln x-mx^2+m<0$ 对 $\forall x\in(1,+\infty)$ 恒成立.

令 $h(x)=\ln x-mx^2+m$，$x\in(0,+\infty)$（提示：若分离参数，会出现对数与其他代数式的组合，故尽量把对数分离开），注意到 $h(1)=0$，

$h'(x)=\frac{1}{x}-2mx=\frac{1-2mx^2}{x}$，

若 $m\leqslant 0$，则 $h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>h(1)=0$，

即对 $\forall x\in(1,+\infty)$，$\ln x-mx^2+m>0$ 恒成立，不符合题意.

若 $m>0$，则当 $0<x<\frac{\sqrt{2m}}{2m}$ 时，$h'(x)>0$，当

$x>\frac{\sqrt{2m}}{2m}$时，$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$\left(0,\frac{\sqrt{2m}}{2m}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\sqrt{2m}}{2m},+\infty\right)$上单调递减.

当$\begin{cases}\frac{\sqrt{2m}}{2m}\leqslant 1,\\ m>0,\end{cases}$即$m\geqslant\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，则当$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)<h(1)=0$，符合题意；

当$\begin{cases}\frac{\sqrt{2m}}{2m}>1,\\ m>0,\end{cases}$即$0<m<\frac{1}{2}$时，$h(x)$在$\left(1,\frac{\sqrt{2m}}{2m}\right)$上单调递增，则当$x\in\left(1,\frac{\sqrt{2m}}{2m}\right)$时，$h(x)>h(1)=0$，不符合题意.

综上，实数m的取值范围为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

4-4.【解】(1)$g'(x)=\frac{1}{x}+1(x>0)$，

则$g'(1)=2$，又$g(1)=1$，

所以所求切线方程为$y-1=2(x-1)$，

即$y=2x-1$.

(2)$h(x)=x^2-\ln x+(a-1)x+\frac{1}{4}$.

(i)$h'(x)=2x-\frac{1}{x}+a-1$，$x>0$，

令$h'(x)=0$，即$2x^2+(a-1)x-1=0$，

则$\Delta=(a-1)^2+8>0$且$-\frac{1}{2}<0$，

所以$2x^2+(a-1)x-1=0$有两异号实数根，

因为$y=2x$，$y=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$h'(x)$有唯一零点$x_0(x_0>0)$.

所以当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

则$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0$，

$+\infty$)上单调递增.

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{3}{4}+\ln\sqrt{2}$,

且 $a=1+\frac{1}{x_0}-2x_0$.

代入可得 $x_0^2+\ln x_0=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $y=x^2$,$y=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $y=x^2+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $a=1$.

(ii)$f(x_1)=g(x_2)=t$,即 $x_1^2+x_1+\frac{1}{4}=\ln x_2+x_2=t$,则 $x_1^2+\frac{1}{4}-\ln x_2=x_2-x_1$.

不妨令 $x_1<x_2$,设 $x_2-x_1=m(m>0)$,则 $(x_2-m)^2+\frac{1}{4}-\ln x_2-m=0$.

记 $k(x)=(x-m)^2+\frac{1}{4}-\ln x-m(x>0)$,

则 $k'(x)=2x-\frac{1}{x}-2m$,

令 $k'(x)=0$,即 $2x^2-2mx-1=0$,

则 $\Delta=4m^2+8>0$ 且 $-\frac{1}{2}<0$,

所以 $2x^2-2mx-1=0$ 有两异号实数根,

因为 $y=2x$,$y=-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $k'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

所以 $k'(x)$有唯一零点 $s(s>0)$,

且 $m=s-\frac{1}{2s}$.

所以当 $x\in(0,s)$时,$k'(x)<0$,

当 $x\in(s,+\infty)$时,$k'(x)>0$,

则 $k(x)$在$(0,s)$上单调递减,在$(s,+\infty)$上单调递增,所以 $k(s)\leqslant 0$.

其中 $k(s)=(s-m)^2-\ln s-m+\frac{1}{4}$,

即 $k(s)=\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{2s}-s-\ln s+\frac{1}{4}\leqslant 0$,

令 $p(s)=\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{2s}-s-\ln s+\frac{1}{4}(s>0)$，又 $p(s)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $p(1)=0$，所以当 $p(s)\leqslant 0$ 时，得 $s\geqslant 1$.

又因为 $m=s-\frac{1}{2s}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m\geqslant\frac{1}{2}\left(\text{当 } m=\frac{1}{2}\text{ 时，有 } 2x_1=x_2=1\right)$，所以 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

5-1. C 【解析】$f'(x)=3x^2-(6a+3)x+6a=(3x-6a)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，则 $x=2a$ 或 $x=1$.

因为 $f(1)=3a-\frac{1}{2}$，所以 $f(1)$ 是函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的最小值，即 $x=1$ 是极小值点，

则 $x=2a$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，

所以 $-1<2a<1$，即 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$.

又因为 $f(-1)\geqslant 3a-\frac{1}{2}$，

即 $a\leqslant -\frac{1}{6}$，

所以 $-\frac{1}{2}<a\leqslant -\frac{1}{6}$.

5-2. 【解】(1) 由 $f(x)=x^2-ax+2\ln x(x>0)$，

得 $f'(x)=2x-a+\frac{2}{x}(x>0)$.

因为 $x>0$，所以 $2x+\frac{2}{x}\geqslant 4$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

因此当 $a\leqslant 4$ 时，$f'(x)=2x-a+\frac{2}{x}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，当且仅当 $x=1$ 且 $a=4$ 时，等号成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>4$ 时，由 $f'(x)=2x-a+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-ax+2}{x}>0$，解得 $x>\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$ 或 $0<x<$

$\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$.

由 $f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}<0$，得 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$，$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$ 上单调递减.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，由(1)可得，x_1,x_2 是方程 $2x^2-ax+2=0$ 的两个不等实根，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{a}{2}$，$x_1x_2=1$，

因此 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-ax_2+2\ln x_2)-(x_1^2-ax_1+2\ln x_1)$

$=x_2^2-x_1^2+2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

$=x_1^2-x_2^2+2\ln\dfrac{x_2}{x_1}$

$=\dfrac{1}{x_2^2}-x_2^2+2\ln x_2^2$.

令 $t=x_2^2$，则 $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{1}{t}-t+2\ln t$.

由(1)可知 $x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$，

当 $a\geqslant 2\sqrt{e}+\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，$x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\geqslant\dfrac{2\sqrt{e}+\dfrac{2\sqrt{e}}{e}+\sqrt{4e+8+\dfrac{4}{e}-16}}{4}=\sqrt{e}$，

所以 $t=x_2^2\in[e,+\infty)$.

令 $g(t)=\frac{1}{t}-t+2\ln t,t\in[e,+\infty)$,

则 $g'(t)=-\frac{1}{t^2}-1+\frac{2}{t}=-\frac{t^2-2t+1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $[e,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $g(t)=\frac{1}{t}-t+2\ln t$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减,

故 $g(t)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}-e+2$,

即 $f(x_2)-f(x_1)$ 的最大值为 $\frac{1}{e}-e+2$.

6-1. B 【解析】对函数 $f(x)$ 求导可得,$f'(x)=e^x+\cos x-1$,记 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=e^x-\sin x$,当 $x\in[-\pi,0]$ 时,$e^x>0$,$\sin x\leqslant 0$,则 $e^x-\sin x>0$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$e^x>1$,$\sin x\in[-1,1]$,则 $e^x-\sin x>0$,所以在 $[-\pi,+\infty)$ 上,$e^x>\sin x$,所以 $g'(x)>0$,所以 $f'(x)$ 单调递增. 又 $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-1=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}-1<0$,$f'(0)=e^0+\cos 0-1=1+1-1>0$,所以必存在 $x_0\in[-\pi,0)$,使得 $f'(x_0)=0$,于是 $f(x)$ 在 $[-\pi,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,又 $f(0)=0$,$f(-\pi)=e^{-\pi}+\sin(-\pi)+\pi-1=\frac{1}{e^{\pi}}+\pi-1>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,x_0)$ 上必存在 1 个零点. 综上,函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,+\infty)$ 上有 2 个零点. 故选 B.

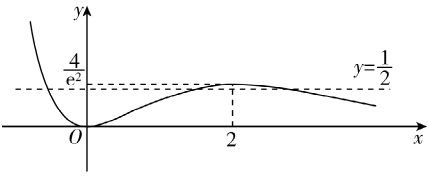
6-2. ABD 【解析】由题意得 $f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$.

对于 A,当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值,$f(x)_{极小}=f(0)=0$,A 正确;

对于 B,当 $x>2$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,又 $2<e<3$,故 $f(e)>f(3)$,B 正确;

对于 C,由以上分析可得在[1,3]上,$f(x)_{\max}=f(2)=\frac{4}{e^2}$,故若$f(x)\leqslant m$在[1,3]上恒成立,则$m\geqslant\frac{4}{e^2}$,C 错误;

对于 D,由以上分析可作出函数$f(x)$的大致图象如图所示,



可知$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$的图象与直线$y=\frac{1}{2}$有三个交点,

故函数$h(x)=f(x)-\frac{1}{2}$有三个零点,D 正确. 故选 ABD.

6-3.【解】(1)$F(x)=\frac{a}{2}(x-1)^2-x+\ln x$,定义域为$(0,+\infty)$,

则 $F'(x)=a(x-1)-1+\frac{1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x}=\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-1)}{x}$.

当$a=1$时,$F'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$,当且仅当$x=1$时,$F'(x)=0$,

故$F(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,无极值点;

当$0<a<1$时,$\frac{1}{a}>1$,则$F(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增,

故$F(x)$的极大值点为$x=1$,极小值点为$x=\frac{1}{a}$;

当$a>1$时,$0<\frac{1}{a}<1$,则$F(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调

递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

故 $F(x)$ 的极大值点为 $x=\frac{1}{a}$，极小值点为 $x=1$.

综上，当 $0<a<1$ 时，$F(x)$ 的极大值点为 $x=1$，极小值点为 $x=\frac{1}{a}$；当 $a=1$ 时，$F(x)$ 无极值点；当 $a>1$ 时，$F(x)$ 的极大值点为 $x=\frac{1}{a}$，极小值点为 $x=1$.

(2) 由 (1) 知，当 $1<a<e$ 时，$F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $F(x)$ 的极小值 $F(1)=-1<0$，$F(x)$ 的极大值 $F\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-\frac{1}{a}+\ln\frac{1}{a}=\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}-\ln a-1$.

设 $h(a)=\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}-\ln a-1$，

其中 $a\in(1,e)$，

则 $h'(a)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{a}=\frac{a^2-2a+1}{2a^2}=\frac{(a-1)^2}{2a^2}>0$，

所以 $h(a)$ 在$(1,e)$上单调递增，

所以 $h(a)<h(e)=\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}-2<0$，

即 $F\left(\frac{1}{a}\right)<0$.

因为 $F(4)=\frac{a}{2}(4-1)^2-4+\ln 4>\frac{1}{2}\times 9-4+\ln 4=\ln 4+\frac{1}{2}>0$，

所以有且仅有 1 个零点 x_0，且 $x_0\in(1,4)$，使得 $F(x_0)=0$，

故当 $1<a<e$ 时，$F(x)$ 有且仅有 1 个零点.

6-4. **【解】**(1) $f'(x)=a\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=\frac{x-a}{x^2}$，$x>0$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<a$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>a$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)由方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 得 $\ln x-ax^2-2=0$，令 $g(x)=\ln x-ax^2-2$，则方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 有两个不同的实数根等价于函数 $g(x)=\ln x-ax^2-2$ 有两个零点.

$g'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$，$x>0$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，最多只有一个零点，不符合题意.

②当 $a>0$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 上单调递增，当 $x>\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},+\infty\right)$ 上单调递减，所以 $x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$ 是 $g(x)$ 的极大值点，极大值 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=\ln\frac{1}{\sqrt{2a}}-\frac{5}{2}$.

(i)若 $a\geqslant\frac{1}{2e^5}$，则 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)\leqslant 0$，$g(x)$ 最多只有一个零点，不符合题意.

(ii)若 $0<a<\frac{1}{2e^5}$，则 $g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)>0$，且 $\frac{1}{\sqrt{2a}}>e^{\frac{5}{2}}>1$，$g(1)=-a-2<0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)$ 内有一个零点.

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1$，$x>0$.

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上

单调递增;

当 $x>1$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$,故 $\ln x\leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

所以 $g\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}-2<\frac{1}{a}-1-\frac{1}{a}-2=-3<0$.

又 $\frac{1}{a}>\frac{1}{\sqrt{2a}}$,所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{2a}},\frac{1}{a}\right)$ 内有一个零点.

综上可知,当 $0<a<\frac{1}{2e^5}$ 时,$g(x)$ 有两个零点,即方程 $f(x)=ax^2+\frac{a}{x}$ 有两个不同的实数根,故 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2e^5}\right)$.

7-1. (1)【解】$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$,$x>-1$.

当 $-1<x<0$ 时,$f'(x)<0$;

当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

(2)【证明】当 $x\in[2,+\infty)$ 时,要证 $\frac{g(x)}{x(x-1)}>2$,

即证 $g(x)-2x(x-1)>0$.

令 $h(x)=g(x)-2x(x-1)=e^x-1-2x(x-1)$,$x\geqslant 2$,

则 $h'(x)=e^x-4x+2$.

设 $I(x)=h'(x)=e^x-4x+2(x\geqslant 2)$,

则 $I'(x)=e^x-4\geqslant e^2-4>0$,

即 $I(x)=h'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h'(x)\geqslant h'(2)=e^2-6>0$,

所以 $h(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)\geqslant h(2)=e^2-1-2\times2\times1=e^2-5>0$ 恒成立,

所以当 $x\in[2,+\infty)$ 时,$\frac{g(x)}{x(x-1)}>2$.

7-2. (1)【解】由题知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+a$，

若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极值，则 $f'(1)=1+a=0$，得 $a=-1$.

当 $a=-1$ 时，此时 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减

则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，符合题意，所以 $a=-1$.

(2)【解】当 $a<0$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+a=\dfrac{ax+1}{x}=0$，可得 $x=-\dfrac{1}{a}$.

①当 $0<-\dfrac{1}{a}\leqslant 1$，即 $a\leqslant -1$ 时，对任意的 $x\in[1,2]$，$f'(x)\leqslant 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零，所以函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，则 $f(x)_{\max}=f(1)=a$；

②当 $1<-\dfrac{1}{a}<2$，即 $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 时，

若 $1<x<-\dfrac{1}{a}$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，

若 $-\dfrac{1}{a}<x<2$，则 $f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{1}{a}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{a}\right)-1=-1-\ln(-a)$；

③当 $-\dfrac{1}{a}\geqslant 2$，即 $-\dfrac{1}{2}\leqslant a<0$ 时，对任意的 $x\in[1,2]$，$f'(x)\geqslant 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为零，函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，则 $f(x)_{\max}=f(2)=2a+\ln 2$.

综上所述，

$$f(x)_{\max}=\begin{cases}a, a\leqslant -1,\\ -1-\ln(-a), -1<a<-\dfrac{1}{2},\\ 2a+\ln 2, -\dfrac{1}{2}\leqslant a<0.\end{cases}$$

(3)【证明】当 $a=-1$ 时,$f(x)=\ln x-x$,

要证 $f(x)<e^x-x-2$,只需证 $e^x-\ln x-2>0$.

设 $g(x)=e^x-\ln x-2$,其中 $x>0$,

则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$,

令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$,

所以函数 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

因为 $g'(1)=e-1>0$,$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,

所以存在唯一的零点 x_0,且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $g'(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$,

即 $x_0=-\ln x_0$,

当 $0<x<x_0$ 时,$g'(x)<0$,函数 $g(x)$ 单调递减;

当 $x>x_0$ 时,$g'(x)>0$,函数 $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)\geqslant g(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\dfrac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\dfrac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$,

所以 $e^x-\ln x-2>0$,故 $f(x)<e^x-x-2$.

7-3. (1)【解】由 $g(x)=e^2\ln x-aex$ 得 $g'(x)=\dfrac{e^2}{x}-ae=\dfrac{e^2-aex}{x}(x>0)$,

①当 $a\leqslant 0$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上不存在最大值;

②当 $a>0$ 时,令 $g'(x)=0$,

解得 $x=\dfrac{e}{a}>0$,

当 $x\in\left(0,\dfrac{e}{a}\right)$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在

$\left(0,\frac{e}{a}\right)$上单调递增,

当$x\in\left(\frac{e}{a},+\infty\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$\left(\frac{e}{a},+\infty\right)$上单调递减,

所以$g(x)$在$x=\frac{e}{a}$时,取得最大值$g\left(\frac{e}{a}\right)$,

又由函数$g(x)$在$(e,+\infty)$上存在最大值,

因此$\frac{e}{a}>e$,所以$0<a<1$.

综上,a的取值范围为$(0,1)$.

(2)【证明】当$a=2$时,$g(x)=e^2\ln x-2ex$,且函数$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

要证明$f(x)>g(x)$,即证明当$x>0$时,$(x^2-2x)e^x>e^2\ln x-2ex$,

因为$x>0$,所以不等式等价于$(x-2)e^x+2e>\frac{e^2\ln x}{x}$.

设$\varphi(x)=(x-2)e^x+2e(x>0)$,

则$\varphi'(x)=(x-1)e^x$,

令$\varphi'(x)=0$,得$x=1$,

当$0<x<1$时,$\varphi'(x)<0$,当$x>1$时,$\varphi'(x)>0$,

所以$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

故$\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=e$,当且仅当$x=1$时,等号成立.

设$h(x)=\frac{e^2\ln x}{x}(x>0)$,

则$h'(x)=\frac{e^2(1-\ln x)}{x^2}$,

令$h'(x)=0$,得$x=e$,

当$0<x<e$时,$h'(x)>0$,

当$x>e$时,$h'(x)<0$,

所以$h(x)$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减,

故$h(x)\leqslant h(e)=e$,当且仅当$x=e$时,等

号成立.

综上,当 $x>0$ 时,$\varphi(x)\geqslant h(x)$,且等号不同时成立,

所以 $x>0$ 时,$\varphi(x)>h(x)$,

即当 $a=2$ 时,$f(x)>g(x)$ 得证.

巩固练

1. C 【解析】由导函数图象可知,函数 $f(x)$ 只有一个极小值点 $x=1$,即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值,没有最大值.

2. B 【解析】函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}+x-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+1-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(e^x+x)}{x^2}$,

因为 $x>0$,所以 $e^x+x>0$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,即最小值,

故 $f(x)$ 的最小值为 $f(x)_{\min}=f(1)=e+1$. 故选 B.

3. A 【解析】因为 a,b 为正实数,

所以 $f'(x)=3ax^2+b>0$,

所以 $f(x)=ax^3+bx+2$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

所以函数 $f(x)=ax^3+bx+2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=a+b+2=4$,即 $a+b=2$.

所以 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上的最小值为 $f(-1)=-(a+b)+2=0$.

4. A 【解析】$\because f(x)=x^3-3x$,

$\therefore f'(x)=3x^2-3$.

令 $f'(x)=3x^2-3=0$,得 $x=\pm1$,

当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$;当 $-1<x<1$ 时,

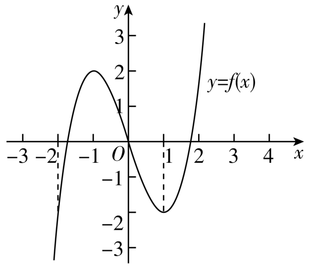
$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,在 $(-1,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

$f(-1)=2$,$f(1)=-2$,

又当 $f(x)=x^3-3x=0$ 时,解得 $x=-\sqrt{3}$ 或 $x=0$ 或 $x=\sqrt{3}$,

所以 $f(x)$ 的图象如下:



由图象知,当 $x\in(a,a+4)$ 时,$f(x)$ 存在最小值,必有 $-2\leqslant a<1$,故选 A.

5. $15x-3y-2=0$ 【解析】$\because f'(x)=-2x^2+4ax+3=-2(x-a)^2+3+2a^2$,

$\therefore f'(x)_{\max}=3+2a^2=5$.

$\because a>0$,$\therefore a=1$,$\therefore f'(x)=-2x^2+4x+3$,

$f'(1)=-2+4+3=5$. 又 $f(1)=-\dfrac{2}{3}+2+3=\dfrac{13}{3}$,$\therefore$ 所求切线的方程为 $y-\dfrac{13}{3}=5(x-1)$,即 $15x-3y-2=0$.

6. $(-1,+\infty)$ 【解析】由题意知 $f(x)-g(x)=e^x-x+a>0$ 对一切实数 x 恒成立,令 $h(x)=e^x-x+a$,则 $h(x)_{\min}>0$.

由 $h'(x)=e^x-1=0$,得 $x=0$,

当 $x<0$ 时,$h'(x)<0$,则 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减;

当 $x>0$ 时,$h'(x)>0$,则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $x=0$ 时,$h(x)$ 取得极小值,也是最小值,$h(0)=1+a$,

$\therefore 1+a>0$,即 $a>-1$.

7. $[2-\ln 2,+\infty)$ 【解析】$f'(x)=\dfrac{1}{x-4}+$

$\frac{1}{x}+a=\frac{2x-4}{x(x-4)}+a$. $\because x\in[1,2]$, $a>0$, $\therefore f'(x)=\frac{2x-4}{x(x-4)}+a>0$, $\therefore f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值为 $f(2)=2\ln 2+2a\geqslant 4$, 即 $a\geqslant 2-\ln 2$.

故实数 a 的取值范围为 $[2-\ln 2,+\infty)$.

8. 【解】(1) 因为 $f(x)=x\ln x-1(x>0)$,

所以 $f'(x)=\ln x+1$,

所以 $f(1)=-1$, $f'(1)=1$, 故切点为 $(1,-1)$, 切线斜率为 1.

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+1=(x-1)$, 即 $x-y-2=0$.

(2) $f'(x)=\ln x+1$, 令 $f'(x)=\ln x+1=0$, 解得 $x=\frac{1}{e}$.

当 $\frac{1}{3}\leqslant x<\frac{1}{e}$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $\frac{1}{e}<x\leqslant 1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

又 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\ln 3-1$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}-1$, $f(1)=-1$,

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},1\right]$ 上的最大值是 -1, 最小值是 $-\frac{1}{e}-1$.

9. 【解】(1) 当 $m=-2$ 时, $f(x)=\ln x+\frac{2}{x}$,

$\therefore f'(x)=\frac{x-2}{x^2}(x>0)$,

$\therefore x\in(0,2)$ 时, $f'(x)<0$, $x\in(2,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$, 单调递减区间为 $(0,2)$.

(2) 由 $f'(x)=\frac{x+m}{x^2}(x>0)$,

令 $f'(x)=0$, 得 $m+x=0$, $x=-m$,

①当$-m\leqslant 1$，即$m\geqslant -1$时，由$x\in[1,e]$，知$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，

从而$f(x)_{\min}=f(1)=-m=4$，

可得$m=-4$，不符合题意；

②当$-m\geqslant e$，即$m\leqslant -e$时，由$x\in[1,e]$，知$f(x)$在$[1,e]$上单调递减，从而$f(x)_{\min}=f(e)=1-\dfrac{m}{e}=4$，可得$m=-3e$，符合题意；

③当$-e<m<-1$时，由$x\in[1,e]$知$f(x)$在$[1,-m]$上单调递减，在$[-m,e]$上单调递增，

从而$f(x)_{\min}=f(-m)=\ln(-m)+1=4$，

解得$m=-e^3$，不符合题意.

综上，$m=-3e$.

10. B 【解析】$\because f'(x)=3x^2+2ax$，

$\therefore f'(1)=3+2a=7$，则$a=2$，

$\therefore f'(x)=x(3x+4)$.

当$x<-\dfrac{4}{3}$时，$f'(x)>0$；当$-\dfrac{4}{3}<x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$(-\infty,0)$上的最大值为$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{32}{27}$.

$\because -2^x<0$，$\therefore f(-2^x)$的最大值为$\dfrac{32}{27}$.

故选B.

11. B 【解析】由题意得，$x>0$，$f'(x)=2x-2a+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-ax+1)}{x}$，所以$x_1,x_2$是方程$x^2-ax+1=0$的两个不等正根，所以$\Delta=a^2-4>0$，$x_1+x_2=a\geqslant\dfrac{5}{2}$，$x_1x_2=1$. 因为不等式$f(x_1)\geqslant mx_2$恒成立，即$m\leqslant\dfrac{f(x_1)}{x_2}$恒成立.

又$\dfrac{f(x_1)}{x_2}=\dfrac{x_1^2-2ax_1+2\ln x_1}{x_2}=x_1^3-2ax_1^2+2x_1\ln x_1=x_1^3-2(x_1+x_2)x_1^2+2x_1\ln x_1=-x_1^3-2x_1+2x_1\ln x_1$，

则 $m\leqslant(-x_1^3-2x_1+2x_1\ln x_1)_{\min}$. 又 $x_1+x_2=a\geqslant\dfrac{5}{2}$, $x_1x_2=1$, $x_1<x_2$, 可得 $x_1+\dfrac{1}{x_1}\geqslant\dfrac{5}{2}$, 则 $0<x_1\leqslant\dfrac{1}{2}$.

令 $g(x)=-x^3-2x+2x\ln x\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$,

则 $g'(x)=-3x^2-2+2+2\ln x=-3x^2+2\ln x<0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\min}=g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{8}-\ln 2$, 故 $m\leqslant-\dfrac{9}{8}-\ln 2$. 故选 B.

12. A 【解析】因为方程 $x-\ln x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-a=0$ 在 $[1,2]$ 上有唯一实根,

即 $x-\ln x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}=a$ 在 $[1,2]$ 上有唯一实根, 令 $g(x)=x-\ln x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}(x>0)$, 则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}=\dfrac{x^4-x^3-3x^2-2x+6}{x^4}$,

令 $h(x)=x^4-x^3-3x^2-2x+6$,

则 $h'(x)=4x^3-3x^2-6x-2$. 令 $m(x)=4x^3-3x^2-6x-2$,

则 $m'(x)=12x^2-6x-6=6(x-1)(2x+1)$, 当 $x\in[1,2]$ 时, $m'(x)\geqslant0$, 且 $m'(x)$ 不恒等于 0, 则 $m(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增, 又 $m(1)=-7$, $m(2)=6$, 所以 $\exists b\in(1,2)$, 使得 $m(b)=0$, 所以当 $x\in(1,b)$ 时, $m(x)<0$; 当 $x\in(b,2)$ 时, $m(x)>0$, 即 $h(x)$ 在 $(1,b)$ 上单调递减, 在 $(b,2)$ 上单调递增, 又 $h(1)=1$, $h(2)=-2$,

所以 $\exists x_0\in(1,2)$ 满足 $h(x_0)=0$, 即 $g'(x_0)=0$,

所以 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,2)$ 上单调递减,

又 $g(1)=3$,$g(2)=\frac{7}{2}-\ln 2$,且 $3>\frac{7}{2}-\ln 2$,又 $a\leqslant 3$,

所以若方程 $x-\ln x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-a=0$ 在 $[1,2]$ 上有唯一实根,则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{7}{2}-\ln 2,3\right)$. 故选 A.

13. $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 【解析】由已知,不等式 $f(x)\geqslant x^2$ 可化为 $ae^x+x\geqslant x^2-x\ln x$ $(x>0)$,

两边同时除以 x 得 $\frac{ae^x}{x}+1\geqslant x-\ln x=\ln\frac{e^x}{x}$.

令 $t=\frac{e^x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,则 $t'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}$,

当 $0<x<1$ 时,$t'<0$,函数 $t=\frac{e^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

当 $x>1$ 时,$t'>0$,函数 $t=\frac{e^x}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x=1$ 时,函数 $t=\frac{e^x}{x}$ 取最小值,最小值为 e,

当 $x\to 0$ 时,$t\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$t\to+\infty$,

所以 $t=\frac{e^x}{x}$ 的范围是 $[e,+\infty)$,即 $t\geqslant e$.

所以不等式 $\frac{ae^x}{x}+1\geqslant\ln\frac{e^x}{x}$ 可化为 $at+1\geqslant\ln t$,其中 $t\geqslant e$,

所以 $a\geqslant\frac{\ln t-1}{t}$ 在 $[e,+\infty)$ 上恒成立,

构造函数 $g(t)=\frac{\ln t-1}{t}$,$t\in[e,+\infty)$,

则 $g'(t)=\frac{2-\ln t}{t^2}$,令 $g'(t)=0$,可得

$t=e^2$，

当 $e\leqslant t<e^2$ 时，$g'(t)>0$，函数 $g(t)$ 在 $[e,e^2)$ 上单调递增，

当 $t>e^2$ 时，$g'(t)<0$，函数 $g(t)$ 在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $t=e^2$ 时，$g(t)$ 取最大值，最大值为 $\frac{1}{e^2}$，

所以 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$，所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$.

14. 0（答案不唯一）　$\sqrt{3}$　【解析】令 $h(x)=(x-3)e^x+e^2$，$h'(x)=(x-2)e^x$，

当 $x<2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x>2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

所以当 $x=2$ 时，$h(x)$ 取极小值 0.

若 $a=0$，

则 $f(x)=\begin{cases}3,x<0,\\(x-3)e^x+e^2,x\geqslant0,\end{cases}$

$f(x)_{\min}=f(2)=0$；

若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+3$ 单调递增，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

故 $f(x)$ 没有最小值，不符合题目要求；

若 $a>0$，当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+3$ 单调递减，$f(x)>f(a)=-a^2+3$，

当 $x>a$ 时，

$f(x)_{\min}=\begin{cases}0,0<a<2,\\(a-3)e^a+e^2,a\geqslant2,\end{cases}$

由题意 $\begin{cases}0<a<2,\\-a^2+3\geqslant0\end{cases}$ ①或

$\begin{cases}a\geqslant2,\\-a^2+3\geqslant(a-3)e^a+e^2\end{cases}$ ②，

由①解得 $0<a\leqslant\sqrt{3}$，

当 $a\geqslant2$ 时，$y=(a-3)e^a+e^2$，$y=a^2-3$ 均单调递增，

则 $g(a)=(a-3)e^{a}+e^{2}+a^{2}-3$ 单调递增，$g(a)\geqslant g(2)=1>0$，故②无解.

综上，$0\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，$a$ 的最大值为$\sqrt{3}$.

15. (1)【解】由题意得，$f'(x)=e^{x}-a$，又 $a\geqslant 0$，

①当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x}>0$ 恒成立，满足题意；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值，也为最小值.

要使 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $f(\ln a)\geqslant 0$，

即 $e^{\ln a}-a(\ln a+1)\geqslant 0$，$a-a\ln a-a\geqslant 0$，解得 $0<a\leqslant 1$.

综上，$0\leqslant a\leqslant 1$，所以 a 的最大值为 1.

(2)【证明】当 $a=1$ 时，由(1)可知 $e^{x}\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

令 $x=\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}_{+}$，即 $e^{\frac{1}{n}}>\frac{1}{n}+1=\frac{n+1}{n}$.

所以 $e^{1}>\frac{2}{1}$，$e^{\frac{1}{2}}>\frac{3}{2}$，…，$e^{\frac{1}{2\,022}}>\frac{2\,023}{2\,022}$，

将各式相乘可得 $e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\,022}}>\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2\,023}{2\,022}=2\,023$，

即 $e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2\,022}}>2\,023$.

16. ACD 【解析】对于选项 A，由题意可得，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

且 $f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$，

令 $f'(x)>0$，解得 $0<x<1$，

令 $f'(x)<0$，解得 $x>1$，

则函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 有最大值 $f(1)=1$，故 A 正确；

对于选项 B，因为 $f\left(\frac{3}{e}\right)=\frac{3}{e}\left(1-\ln\frac{3}{e}\right)=\frac{3(2-\ln 3)}{e}$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\left(1-\ln\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$，

则 $f\left(\frac{3}{e}\right)-f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{3(2-\ln 3)}{e}-\frac{2}{e}=\frac{4-3\ln 3}{e}=\frac{1}{e}\ln\frac{e^4}{27}>0$，

所以 $f\left(\frac{3}{e}\right)>f\left(\frac{1}{e}\right)$，

故 B 错误；

对于选项 C，构建 $F(x)=f(x)-a(e-x)(x>0)$，则 $F'(x)=-\ln x+a$.

因为 $F(e)=0$，且当 $x\geqslant e$ 时，$F(x)\leqslant 0$ 恒成立，

则 $F'(e)=-1+a\leqslant 0$，解得 $a\leqslant 1$.

若 $a\leqslant 1$，当 $x\geqslant e$ 时，

则 $F'(x)=-\ln x+a\leqslant 0$ 恒成立，

则 $F(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，则 $F(x)\leqslant F(e)=0$，符合题意，

综上所述，$a\leqslant 1$ 符合题意，故 C 正确；

对于选项 D，因为 $\frac{\ln x_1}{x_1}-\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}$，

整理得 $\frac{1}{x_1}\left(1-\ln\frac{1}{x_1}\right)=\frac{1}{x_2}\left(1-\ln\frac{1}{x_2}\right)$，即 $f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{1}{x_2}\right)$，

由选项 A 可知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，且令 $f(x)>0$，解得 $0<x<e$，

不妨设 $0<\frac{1}{x_1}<1<\frac{1}{x_2}<e$，

构建 $g(x)=f(1+x)-f(1-x)$，$x\in(0,1)$，

因为 $g'(x)=f'(1+x)+f'(1-x)=-\ln(1+x)-\ln(1-x)=-\ln(1-x^2)>0$

在$(0,1)$上恒成立，

则$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，

可得$g(x)>g(0)=0$，

所以$f(1+x)>f(1-x), x\in(0,1)$，

即$f(2-x)>f(x), x\in(0,1)$，

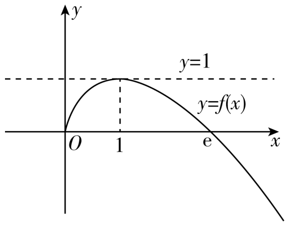
可得$f\left(\frac{1}{x_2}\right)=f\left(\frac{1}{x_1}\right)<f\left(2-\frac{1}{x_1}\right)$，

注意到$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

且$1<2-\frac{1}{x_1}<2, 1<\frac{1}{x_2}<\mathrm{e}$，

所以$\frac{1}{x_2}>2-\frac{1}{x_1}$，即$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>2$，故 D 正确.

故选 ACD.



17. BCD 【解析】设$h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-\ln x(x>0)$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，令$p(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$，则$p'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x^2}>0$，

所以$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$h'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}-\mathrm{e}<0$，$h'(1)=\mathrm{e}-1>0$，

则存在$x_0\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，使得$h'(x_0)=0$，当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(x_0,1)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，故 A 错误；

由$h'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$，

即$\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

所以当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，所以

$h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+x_0$,

又 $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$，则 $\dfrac{1}{x_0}+x_0>2$，故 B 正确；

易知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

且 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x+1$ 切于 $A(0,1)$，$g(x)$ 的图象与直线 $y=x-1$ 切于 $B(1,0)$，所以 $|PQ|$ 的最小值为 $|AB|=\sqrt{2}$，故 C 正确；

若 $f(mx)-g(x)\geqslant(1-m)x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 $e^{mx}-\ln x\geqslant(1-m)x$,

即 $mx+e^{mx}\geqslant\ln x+x$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $\ln e^{mx}+e^{mx}\geqslant\ln x+x$.

令 $F(x)=x+\ln x$，则 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $F(e^{mx})\geqslant F(x)$,

即 $e^{mx}\geqslant x$，所以 $mx\geqslant\ln x$,

即 $m\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$.

令 $H(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$,

则 $H'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,e)$ 时，$H'(x)>0$，当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$H'(x)<0$,

所以 $H(x)_{\max}=H(e)=\dfrac{1}{e}$,

所以 $m\geqslant\dfrac{1}{e}$，故 D 正确.

故选 BCD.

18. AC 【解析】对于 A，当 $x\in(-3,-1)$ 时，$(x+1)f'(x)>0$，又 $x+1<0$，$\therefore f'(x)<0$；当 $x\in(-1,3)$ 时，$(x+1)f'(x)<0$，又 $x+1>0$，$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-3,-1)$ 和 $(-1,3)$ 上均单调递减，A 正确；

对于 B，根据图象可知 $x=5$ 是 $f'(x)$ 的零点，但无法确定 $f(5)=0$，B 错误；

对于 C，由 A 知 $f(x)$ 在 $(-1,3)$ 上单调递减，

当 $x\in(3,5)$ 时，$(x+1)f'(x)>0$，

又 $x+1>0$，$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(3,5)$ 上单调递增，

又 $4f'(3)=0$，$\therefore f'(3)=0$，

$\therefore x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点，C 正确；

对于 D，当 $x>5$ 时，$(x+1)f'(x)<0$，

又 $x+1>0$，

$\therefore f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $(5,+\infty)$ 上单调递减，又 $f(x)$ 在 $(3,5)$ 上单调递增，$\therefore f(5)$ 是 $f(x)$ 的极大值，无法确定是最大值，D 错误. 故选 AC.

6.3 利用导数解决实际问题

易错记

1-1.【解】(1) 由题意可得

$$\begin{cases}100a+\dfrac{101}{5}-b\ln 10+b\ln 10=19.2,\\ 900a+\dfrac{303}{5}-b\ln 30+b\ln 10=50.5,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{100},\\ b\approx 1,\end{cases}$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{100}x^2+\dfrac{101}{50}x-\ln x+\ln 10\ (x\geqslant 10)$.

(2) 由 (1) 可知 $T(x)=f(x)-x=-\dfrac{1}{100}x^2+\dfrac{51}{50}x-\ln x+\ln 10$，$x\geqslant 10$，

$T'(x)=-\dfrac{1}{50}x+\dfrac{51}{50}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{(x-1)(x-50)}{50x}$.

$\because x\geqslant 10$，

$\therefore$ 当 $x\in[10,50)$ 时，$T'(x)>0$，$T(x)$ 单调递增；当 $x\in(50,+\infty)$ 时，$T'(x)<0$，$T(x)$ 单调递减，

$\therefore$ 当 $x=50$ 时，$T(x)$ 取得极大值，也是最大值，

$T(50)=-\frac{1}{100}\times 50^2+\frac{51}{50}\times 50-\ln 50+\ln 10\approx 24.4$.

$\therefore$ 该景点改造升级后旅游利润的最大值约为 24.4 万元.

题型诀

1–1. B 【解析】设圆柱的底面半径为 r，则高为 $6-2\pi r$，可得 $0<r<\frac{3}{\pi}$，

则该圆柱的体积 $V=\pi r^2\cdot(6-2\pi r)=-2\pi^2r^3+6\pi r^2$，

则 $V'=-6\pi^2r^2+12\pi r=-6\pi r(\pi r-2)$.

令 $V'>0$，解得 $0<r<\frac{2}{\pi}$；

令 $V'<0$，解得 $\frac{2}{\pi}<r<\frac{3}{\pi}$，

所以当 $r=\frac{2}{\pi}$ 时，圆柱体积取得最大值，

此时圆柱的高为 $6-2\pi\times\frac{2}{\pi}=2$. 故选 B.

1–2. C 【解析】设圆锥的高为 h，则圆柱的高为 $3h$，底面圆半径 $r=\sqrt{36-h^2}$ $(0<h<6)$，则该模型的体积 $V=\pi r^2\cdot 3h+\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{10}{3}h(36-h^2)\pi=\frac{10}{3}(-h^3+36h)\pi$. 令 $f(x)=-x^3+36x(0<x<6)$，则 $f'(x)=-3x^2+36$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm2\sqrt{3}$. 当 $0<x<2\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $2\sqrt{3}<x<6$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(0,2\sqrt{3})$ 上单调递增，在 $(2\sqrt{3},6)$ 上单调递减，当 $x=2\sqrt{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，即当 $h=2\sqrt{3}$ 时，$V_{\max}=160\sqrt{3}\pi$，故选 C.

1–3. A 【解析】设圆柱的底面半径与高

分别为 r 分米，h 分米，则该几何体的表面积 $S=4\pi r^2+2\pi rh=12\pi$，则 $h=\frac{6-2r^2}{r}$ $(1<r<\sqrt{3})$，所以该几何体的体积 $V=V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2h=\frac{2\pi}{3}(9r-r^3)$ $(1<r<\sqrt{3})$，则 $V'(r)=\frac{2\pi}{3}(9-3r^2)$. 当 $1<r<\sqrt{3}$ 时，$V'(r)>0$，则 $V(r)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递增，故 V 的取值范围是 $\left(\frac{16\pi}{3},4\sqrt{3}\pi\right)$. 故选 A.

2-1. 25 【解析】由题可知池底面积为 $\frac{2\ 500}{2}=1\ 250(\mathrm{m}^2)$，其为定值，则池底维修费用为定值，则泳池维修费用由池壁维修费用决定. 又 x 表示较短池壁长，则 $0<x<\frac{2\ 500}{2x}$，即 $0<x<25\sqrt{2}$，则池壁的总维修费用表达式为 $2\times\frac{4k}{25}x+\frac{2\ 500k}{x^2}$. 设 $f(x)=\frac{8k}{25}x+\frac{2\ 500k}{x^2}$，$0<x<25\sqrt{2}$，则 $f'(x)=\frac{8k}{25}-\frac{5\ 000k}{x^3}=\frac{8kx^3-125\ 000k}{25x^3}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=25$，则当 $f'(x)>0$ 时，$25<x<25\sqrt{2}$，当 $f'(x)<0$ 时，$0<x<25$，则 $f(x)$ 在 $(0,25)$ 上单调递减，在 $(25,25\sqrt{2})$ 上单调递增，所以当 $x=25$ 时，$f(x)$ 取最小值，即泳池的总维修费用最低.

2-2. 【解】(1) 由题意知，需要新建的高压线塔为 $\frac{16}{x}-1$ $\left(0<x\leqslant 16，且\frac{16}{x}为正整数\right)$ 座.

所以 $y=f(x)=2\left(\frac{16}{x}-1\right)+\frac{16}{x}\times 4x[\ln(x+0.48)-0.125]$，

即 $y=f(x)=\frac{32}{x}+64\ln(x+0.48)-$

$10\left(0<x\leqslant16,且\dfrac{16}{x}为正整数\right)$.

(2)由(1)不妨设 $g(x)=\dfrac{32}{x}+64\ln(x+0.48)-10(0<x\leqslant16)$,则 $y=f(x)$ 的图象为 $g(x)$ 图象上横坐标满足 $0<x\leqslant16$,且 $\dfrac{16}{x}$ 为正整数的点. $g'(x)=-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{64}{x+0.48}=\dfrac{32(2x^2-x-0.48)}{x^2(x+0.48)}$,$0<x\leqslant16$,

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0.8$ 或 $x=-0.3$(舍去).

由 $g'(x)<0$,得 $0<x<0.8$;由 $g'(x)>0$,得 $0.8<x\leqslant16$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,0.8)$ 上单调递减,在区间 $(0.8,16]$ 上单调递增.

所以当 $x=0.8$ 时,函数 $g(x)$ 取得极小值也是最小值,

又 $\dfrac{16}{0.8}=20$ 为正整数,所以 $f(x)_{\min}=\dfrac{32}{0.8}+64\ln1.28-10=30+64(7\ln2-2\ln10)\approx44.72$,

此时应建高压线塔为 $\dfrac{16}{0.8}-1=19$(座).

故需建 19 座高压线塔才能使余下的工程费用最低,约为 44.72 万元.

3-1. B 【解析】设投入 B 商品 x 千元 $(0\leqslant x\leqslant5)$,则投入 A 商品 $(5-x)$ 千元,所获得的收益为 $S(x)$ 千元,则 $S(x)=2(5-x)+5\ln(2x+1)=5\ln(2x+1)-2x+10$ $(0\leqslant x\leqslant5)$,$S'(x)=\dfrac{10}{2x+1}-2=\dfrac{4(2-x)}{2x+1}$.

当 $0\leqslant x<2$ 时,$S'(x)>0$,函数 $S(x)$ 在 $[0,2)$ 上单调递增;

当 $2<x\leqslant5$ 时,$S'(x)<0$,函数 $S(x)$ 在 $(2,5]$ 上单调递减.

所以当 $x=2$ 时,函数 $S(x)$ 取得最大值 $S(2)=6+5\ln5$,

所以当投入 B 商品 2 千元,投入 A 商品 3

千元时,总收益最大.

3-2.【解】(1)设 $w(x)=kx+b(k\neq0)$. 由 $\begin{cases}w(1)=57,\\w(10)=120,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}k+b=57,\\10k+b=120,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=7,\\b=50,\end{cases}$ 所以 $w(x)=7x+50(x>0)$,依题意得,$F(x)=xG(x)-50-7x=x\left(-\frac{7}{x^2}+\frac{20\ln x}{x}+\frac{84}{x}+4\right)-50-7x=-\frac{7}{x}+20\ln x-3x+34(x>0)$.

(2)由(1)得,$F(x)=-\frac{7}{x}+20\ln x-3x+34(x>0)$,则 $F'(x)=\frac{7}{x^2}+\frac{20}{x}-3=\frac{-3x^2+20x+7}{x^2}=-\frac{(3x+1)(x-7)}{x^2}$.

令 $F'(x)>0$,得 $0<x<7$,令 $F'(x)<0$,得 $x>7$,所以 $F(x)$ 在 $(0,7)$ 上单调递增,在 $(7,+\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x=7$ 时,$F(x)_{\max}=F(7)=20\ln 7+12\approx20\times1.95+12=51$,

即当年产量为 7 百件时,

该企业利润最大为 51 万元.

巩固练

1. C【解析】设底面边长为 x,则表面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{4\sqrt{3}}{x}V(x>0)$,故 $S'=\frac{\sqrt{3}}{x^2}(x^3-4V)$. 令 $S'=0$,得 $x=\sqrt[3]{4V}$,可判断当 $x=\sqrt[3]{4V}$ 时,S 取得最小值.

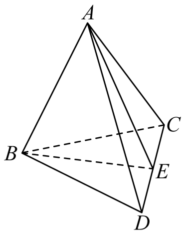
2. 8【解析】设当莲藕种植量为 x 万千克时,销售利润为 $g(x)$ 万元,则 $g(x)=-\frac{1}{6}x^3+ax^2+x-2-x=-\frac{1}{6}x^3+ax^2-2(0\leqslant x\leqslant10)$. $\because g(3)=-\frac{1}{6}\times3^3+a\times3^2-2=\frac{23}{2}$, $\therefore a=2$, 即 $g(x)=-\frac{1}{6}x^3+2x^2-2(0\leqslant x\leqslant10)$,则

$g'(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x=-\frac{1}{2}x(x-8)$. 当 $x\in[0,8)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(8,10]$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $[0,8)$ 上单调递增，在 $(8,10]$ 上单调递减，故当 $x=8$ 时，$g(x)$ 取得最大值，故要使销售利润最大，每年需种植莲藕 8 万千克.

3.【解】(1)设产品单价为 a 元，因为产品单价的平方与产品件数 x 成反比，即 $a^2x=k$，由题知 $k=50^2\times100=250\ 000$，所以 $a=\frac{500}{\sqrt{x}}$，所以总利润 $y=500\sqrt{x}-\frac{2}{75}x^3-1\ 200(x\geqslant1)$.

(2)由(1)得 $y=500\sqrt{x}-\frac{2}{75}x^3-1\ 200(x\geqslant1)$，则 $y'=\frac{250}{\sqrt{x}}-\frac{2}{25}x^2$，令 $y'=0$，得 $x=25$. 当 $x\in[1,25)$ 时，$y'>0$，函数单调递增；当 $x\in(25,+\infty)$ 时，$y'<0$，函数单调递减，所以当 $x=25$ 时，y 取得极大值且为最大值，即当 x 定为 25 件时，总利润最大.

4. A 【解析】如图所示，设 $AB=CD=a(a>0)$，$AC=AD=BD=BC=2$.



过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E，连接 BE，则 $AE=\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}=BE$. 又 $AB=a$，所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{2}}$，所以 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{4-\frac{a^2}{2}}=\frac{1}{6}\sqrt{4a^4-\frac{a^6}{2}}(0<a<2\sqrt{2})$.

令 $f(a)=4a^4-\dfrac{a^6}{2}(0<a<2\sqrt{2})$，则

$f'(a)=16a^3-3a^5$，

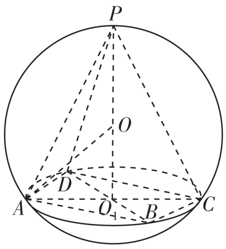
令 $f'(a)=0$，得 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$（负根舍去）.

当 $a\in\left(0,\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 时，$f'(a)>0$，$f(a)$ 单调递增；

当 $a\in\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3},2\sqrt{2}\right)$ 时，$f'(a)<0$，$f(a)$ 单调递减. 所以当 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，三棱锥的体积最大，最大值 $(V_{A-BCD})_{\max}=\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$，

所以此三棱锥体积的取值范围是 $\left(0,\dfrac{16\sqrt{3}}{27}\right]$，故选 A.

5. A 【解析】如图，连接 AC，BD 交于点 O_1，则 O_1 为底面 $ABCD$ 的中心，则 P，O，O_1 三点共线，连接 PO_1，OA.



设正四棱锥的高为 $h(0<h<2)$，则 $OO_1=h-1$，则 $O_1A=\sqrt{1-(h-1)^2}$，$AB=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-(h-1)^2}$，所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times2[1-(h-1)^2]\times h=\dfrac{2}{3}(-h^3+2h^2)(0<h<2)$.

令 $f(h)=\dfrac{2}{3}(-h^3+2h^2)(0<h<2)$，

则 $f'(h)=\dfrac{2}{3}(-3h^2+4h)=\dfrac{2}{3}h(-3h+4)$，当 $0<h<\dfrac{4}{3}$ 时，$f'(h)>0$，$f(h)$ 单调递增，当 $\dfrac{4}{3}<h<2$ 时，$f'(h)<0$，$f(h)$ 单

调递减,所以当 $h=\frac{4}{3}$时,$f(h)$取得极大值也是最大值,即 V_{P-ABCD} 最大. 故选 A.

6. 30 千米/时 【解析】由题意可得 100 千米的航程需要$\frac{100}{x}$小时,故总费用

$f(x)=\left(\frac{1}{100}x^3+x+540\right)\cdot\frac{100}{x}$,

即 $f(x)=x^2+100+\frac{54\ 000}{x}(x>0)$,故

$f'(x)=2x-\frac{54\ 000}{x^2}=\frac{2(x^3-27\ 000)}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$,解得 $x=30$.

故当 $0<x<30$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x>30$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

故当 $x=30$ 时,

$f(x)$取得最小值,即要使航行的总费用最少,航速应为 30 千米/时.

7. 6 cm　4 cm 【解析】设底面的长为 $2x$ cm,则由条件可得宽为 x cm,高为

$\frac{72}{2x^2}=\frac{36}{x^2}$(cm),

所以表面积 $S(x)=4x^2+\frac{36}{x^2}\cdot x\cdot 2+\frac{36}{x^2}\cdot 2x\cdot 2=4x^2+\frac{216}{x}$,$x>0$,

则 $S'(x)=8x-\frac{216}{x^2}$.

令 $S'(x)<0$,解得 $0<x<3$;

令 $S'(x)>0$,解得 $x>3$.

所以 $S(x)$在$(0,3)$上单调递减,

在$(3,+\infty)$上单调递增.

故当 $x=3$ 时,$S(x)$取得极小值也是最小值,即此时长为 6 cm,宽为 3 cm,高为 4 cm.

8.【解】(1)由题意,$10=\frac{a}{3-2}+2\times(3-$

$5)^2$，解得 $a=2$，故 $g(x)=\frac{2}{x-2}+2(x-5)^2(2<x<5)$.

(2)商场每日销售该商品所获得的利润 $h(x)=(x-2)g(x)=2+2(x-5)^2\cdot(x-2)(2<x<5)$，

所以 $h'(x)=4(x-5)(x-2)+2(x-5)^2=6(x-3)(x-5)$.

当 x 变化时，$h'(x)$，$h(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(2,3)$	3	$(3,5)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	单调递增	极大值	单调递减

由表可得，$x=3$ 是函数 $h(x)$ 在区间 $(2,5)$ 上的极大值点，也是最大值点，故销售价格为 3 元/件时，该商场每日销售该商品所获得的利润最大.

9.【解】(1)延长 QP 交 AB 于点 E(图略)，则 $QE\perp AB$，且 E 为 AB 的中点，

所以 $AE=BE=QE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD=4$，

由对称性可知，$PA=PB$.

①若 $PQ=x$，则 $0<x<4$，$PE=4-x$，

在 Rt $\triangle PAE$ 中，$PA=\sqrt{PE^2+AE^2}=\sqrt{(4-x)^2+16}$，所以 $L=PQ+2PA=x+2\sqrt{(4-x)^2+16}(0<x<4)$.

②若 $\angle PAB=\theta$，则 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$，在 Rt$\triangle PAE$ 中，$PA=\frac{AE}{\cos\theta}=\frac{4}{\cos\theta}$，$PE=AE\tan\theta=4\tan\theta$，

所以 $PQ=QE-PE=4-4\tan\theta$，

所以 $L=PQ+2PA=4-4\tan\theta+2\times\frac{4}{\cos\theta}=4+4\times\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)若选取①中的函数关系式，$L=x+$

$2\sqrt{(4-x)^2+16}\,(0<x<4)$,

记 $f(x)=x+2\sqrt{(4-x)^2+16}\,(0<x<4)$,

则 $f'(x)=1+2\times\frac{1}{2}\times\frac{-2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+16}}=1-\frac{2(4-x)}{\sqrt{(4-x)^2+16}}$,

令 $f'(x)=0$,

解得 $x_1=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$x_2=4+\frac{4\sqrt{3}}{3}$(舍去).

当 $x\in\left(0,4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

所以当 $x=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,$f(x)$ 取得最小值,即钢管总长度 L 取得最小值,即当 PQ 的长度为 $4-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时,所用的钢管材料最省.

若选取②中的函数关系式,$L=4+4\times\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$,记 $g(\theta)=\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$,则 $g'(\theta)=\frac{2\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$,由 $g'(\theta)=0$ 及 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 得,$\theta=\frac{\pi}{6}$,当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时,$g'(\theta)<0$,$g(\theta)$ 单调递减;

当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时,$g'(\theta)>0$,$g(\theta)$ 单调递增,

所以当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时,$g(\theta)$ 取得最小值,即钢管总长度 L 取得最小值,即当 $\angle PAB=\frac{\pi}{6}$ 时,所用的钢管材料最省.

6.4 数学建模活动:描述体重与脉搏率的关系(略)